

## ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

**Δημήτρης Βλάχος**  
**5<sup>ο</sup> Γενικό Λύκειο Αθηνών**

Κάθε πραγματική ελεύθερη ταλάντωση είναι φθίνουσα και κάθε αμείωτη ταλάντωση (δηλ. εξαναγκασμένη) στην έναρξή της συνυπάρχει για “λίγο” με μια φθίνουσα. Είναι χρήσιμη λοιπόν μια εμπειρική εξοικείωση με αυτό το φαινόμενο. Μεταξύ μιας μηχανικής μονοδιάστατης αρμονικής ταλάντωσης και μιας ηλεκτρικής σε κύκλωμα LC υπάρχει αντιστοιχία, αν η αντίσταση που συναντά ο μηχανικός ταλαντωτής είναι ανάλογη της ταχύτητας του. Οι μηχανικές ταλαντώσεις μας είναι πολύ πιο οικείες και η προαναφερθείσα αντιστοιχία μπορεί να βοηθήσει στην ποιοτική κατανόηση των ηλεκτρικών ταλαντώσεων. Όμως η ποσοτική-πειραματική μελέτη μιας ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι πιο εύκολη<sup>1</sup>. Είναι πιο εύκολο να παρατηρήσουμε μια γρήγορα μεταβαλλόμενη τάση ή ένταση ρεύματος (με ένα παλμογράφο ή ένα καταγραφέα-logger-) απ’ ότι μια γρήγορα μεταβαλλόμενη θέση ή ταχύτητα. Είναι πιο εύκολο να μετρήσουμε μιαν ωμική αντίσταση απ’ ότι έναν συντελεστή απόσβεσης. Στη συνέχεια, μετά από μια σύντομη αναφορά στο θεωρητικό τους πλαίσιο, θα περιγράψουμε τη δημιουργία ηλ. ταλαντώσεων και την καταγραφή τους με τον καταγραφέα MultiLog, για διάφορες τιμές των R, L, C. Θα αναλύσουμε τα πειραματικά δεδομένα συγκρίνοντάς τα με τα θεωρητικώς προβλεπόμενα. Επίσης από την ανάλυση των πειραματικών δεδομένων στην περίπτωση πηνίου με πυρήνα θα προκύψουν σημαντικές ιδιότητες ενός τέτοιου πηνίου.

### Το θεωρητικό πλαίσιο

Η ελεύθερη ταλάντωση σε κύκλωμα LC με ωμική αντίσταση R υπακούει σε μια διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τον 2<sup>ο</sup> κανόνα Kirchhoff

$$-L \frac{di}{dt} - V = Ri \quad (1)^2$$

Αν θέλουμε να παρακολουθήσουμε την ταλάντωση της τάσης V του πυκνωτή, και

επειδή  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$  η (1) γίνεται

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V = 0 \quad (2)$$

<sup>1</sup> Σχεδόν όλα τα σύγχρονα όργανα μέτρησης είναι ηλεκτρονικά και μετράνε κατ’ αρχήν τάση ή συχνότητα. Τα άλλα φυσικά μεγέθη συνήθως μετρώνται αφού μετατραπούν με κατάλληλους αισθητήρες σε τάση ή συχνότητα.

<sup>2</sup> Για να είναι πλήρης η αντιστοιχία με την μηχανική ταλάντωση, θεωρούμε ότι  $i > 0$ , όταν η V αυξάνεται.

Η (2) με αρχικές συνθήκες  $V(0) = V_0$  ,  $\frac{dV}{dt}(0) = 0$  και με την προϋπόθεση ότι

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \equiv R_{kp} \quad (3) \quad , \quad \text{έχει σαν λύση την}$$

$$V(t) = Ce^{-\frac{R}{2L}t} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

όπου 
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (5)$$

και  $C$  ,  $\varphi$  σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Για μικρή απόσβεση δηλαδή όταν η  $R$  είναι “αρκετά” μικρότερη της  $R_{kp}$  ισχύει ότι  $C \approx V_0$  και  $\varphi \approx 0$

οπότε η (4) γίνεται 
$$V(t) = V_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sigma\upsilon\nu\omega t \quad (6)$$

Η (5) λόγω της (3) γίνεται 
$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_{kp}}\right)^2} \quad (7)$$

Από τις (4) και (7) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα

1) Η φθίνουσα ταλάντωση δεν είναι περιοδικό φαινόμενο (Η  $V(t)$  δεν είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου). Όμως υπάρχει περιοδικότητα στους μηδενισμούς της τάσης γιατί προφανώς μηδενίζεται ταυτόχρονα με το  $\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$ . Έτσι έχει νόημα η περίοδος, που είναι η περίοδος του  $\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$ . Τα μέγιστα και τα ελάχιστα της  $V(t)$  δεν συμβαίνουν ακριβώς στα μέσα των χρονικών διαστημάτων μεταξύ των μηδενισμών της<sup>4</sup>, αλλά λίγο πριν. Επίσης τα μέγιστα και τα ελάχιστα του ρεύματος συμβαίνουν λίγο πριν τους μηδενισμούς της τάσης

2) Η φθίνουσα ταλάντωση είναι λίγο πιο αργή από την αντίστοιχη ταλάντωση χωρίς απόσβεση. Από την (7) συνεπάγεται ότι  $\omega < \omega_0$  και η  $\omega$  μικραίνει όταν η  $R$

μεγαλώνει. Όμως αν η  $R$  είναι αρκετά μικρότερη της κρίσιμης  $R_{kp}$  τότε το  $\left(\frac{R}{R_{kp}}\right)^2$

θα είναι πολύ μικρότερο του 1 και από την (6)  $\omega \approx \omega_0$ . Αν π.χ.  $R < \frac{1}{4}R_{kp}$ , από την

$$(6) \Rightarrow 0.97\omega_0 < \omega \Rightarrow \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} < 0.03, \text{ δηλαδή } \omega \approx \omega_0 \text{ με σφάλμα μικρότερο του } 3\% .$$

<sup>3</sup> Αν  $R \geq R_{kp}$  η (2) έχει διαφορετικές από την (4) λύσεις, που δεν περιγράφουν ταλάντωση. Στην περίπτωση αυτή και αν  $i(0)=0$ ,  $V(0)>0$ , η τάση μειώνεται μονότονα τείνοντας ασυμπτωτικά στο μηδέν χωρίς ν' αλλάξει πρόσημο.

<sup>4</sup> Τα ακρότατα της  $V(t)$  και του  $\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$  δεν είναι ταυτόχρονα καθώς οι  $\frac{d}{dt}V(t) = 0$  και

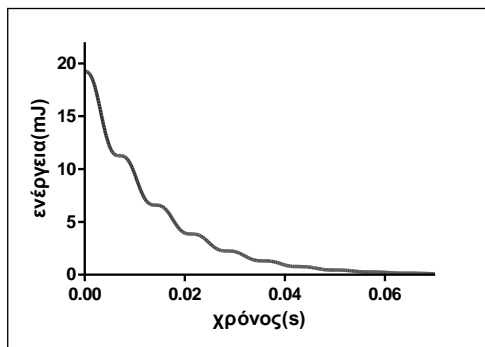
$\frac{d}{dt}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) = 0$  δεν έχουν τις ίδιες ρίζες.

3) Τα διαδοχικά μέγιστα της  $V(t)$  (για μικρή απόσβεση) συμβαίνουν περίπου τις χρονικές στιγμές  $0, T, 2T, 3T, \dots$  και είναι τα  $M_n = V_0 e^{-\frac{R}{2L}nT}, n = 0, 1, 2, \dots$  (8)  
 Άρα

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} = e^{\frac{R}{2L}T}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Το πόσο λοιπόν μικρότερο είναι κάθε μέγιστο από το προηγούμενο δηλαδή το πόσο γρήγορα φθίνει η ταλάντωση εξαρτάται από το  $\frac{R}{2L}T \approx \frac{2\pi R\sqrt{LC}}{2L} = 2\pi \frac{R}{R_{kp}}$ . Το

$\tau = \frac{2L}{R}$  είναι η σταθερά χρόνου και δεχόμαστε ότι μετά χρόνο  $7\tau$  από την έναρξή της, η ταλάντωση πρακτικά σταματάει καθώς το “πλάτος” της θα έχει γίνει μικρότερο από το ένα χιλιοστό του αρχικού ( $e^{-7} \approx 1/1097$ ). Ο αριθμός των πλήρων ταλαντώσεων μέχρι να σταματήσει η ταλάντωση είναι περίπου  $\frac{7\tau}{T} \approx \frac{7}{\pi R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{7}{2\pi} \frac{R_{kp}}{R}$ , δηλαδή είναι της τάξεως του πόσες φορές είναι μικρότερη η  $R$  της κρίσιμης  $R_{kp}$ <sup>5</sup>



Σχ. 1 Θεωρητική καμπύλη της ενέργειας ηλ. ταλαντωτή με  $C=100\mu\text{F}, L=50\text{mH}, R=4\Omega$

Η ενέργεια ενός ταλαντωτή που κάνει ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση, βεβαίως μειώνεται, όχι όμως εκθετικά όπως συχνά διαβάζουμε. Πράγματι τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται η ταχύτητα ή η ένταση ρεύματος, ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας μηδενίζεται (μηδενίζεται ο ρυθμός απωλειών  $-bv^2$  ή  $-i^2R$ ). Δηλαδή η γραφική παράσταση της ενέργειας ως προς το χρόνο τις χρονικές αυτές στιγμές θα πρέπει να έχει μηδενική κλίση (βλ. Σχ.1) Εκθετική μπορούμε να θεωρήσουμε τη μείωση της μέσης τιμής της ενέργειας σε χρόνο μιας περιόδου, όταν η απόσβεση είναι μικρή.

### Πειραματικές διαδικασίες

Θα περιγράψουμε την δημιουργία ηλεκτρικών ταλαντώσεων σε κύκλωμα LC και την καταγραφή κάθε φορά της τάσης του πυκνωτή με τον καταγραφέα (logger) MultiLog της Fourier συνδεδεμένο σε μια σειριακή θύρα του υπολογιστή, όπου έχουμε εγκαταστήσει το λογισμικό DB-Lab.

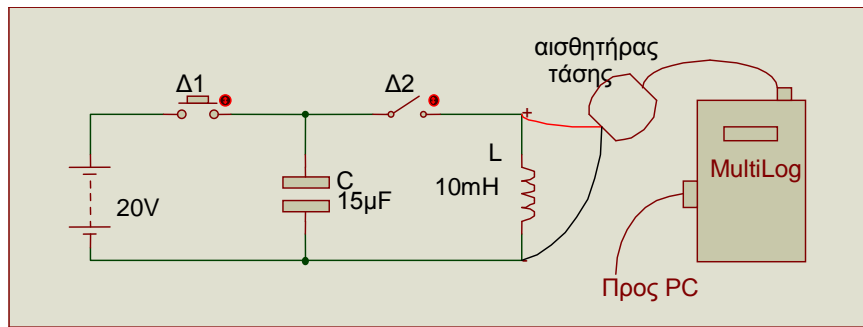
Θα χρησιμοποιήσουμε

- α) Πηνίο 600 σπειρών (χωρίς πυρήνα) με  $L=10\text{mH}$  και  $R=2.5\Omega$
- β) Πυκνωτές (όχι ηλεκτρολυτικούς) με χωρητικότητες  $1\mu\text{F}, 15\mu\text{F}, 95\mu\text{F}$ <sup>6</sup>
- γ) Αισθητήρα τάσης ( $\pm 25\text{V}$ ) και αισθητήρα ρεύματος ( $\pm 2.5\text{A}$ ) για το MultiLog
- δ) Γραμμικό ποτενσιόμετρο  $100\Omega$
- ε) Βραχύ σιδερένιο πυρήνα για το πηνίο
- στ) Εργαστηριακό τροφοδοτικό ρυθμισμένο στα  $20\text{Volt DC}$
- ζ) Κουτί αντιστάσεων
- η) Καταλλήλους διακόπτες

Πραγματοποιούμε το ακόλουθο απλό κύκλωμα

<sup>5</sup> Το πηλίκο  $R_{kp}/R$  μ' έναν αριθμητικό συντελεστή είναι ουσιαστικά ο λεγόμενος παράγων ποιότητας  $Q$  του ταλαντωτή που εκφράζει πόσο μεγαλύτερη είναι την οποιαδήποτε στιγμή η ενέργεια του από την ενέργεια που θα χάσει μετά από μια περίοδο, καθώς επίσης πόσο εξύς είναι ο συντονισμός όταν το κύκλωμα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση μεταβαλλόμενης συχνότητας.

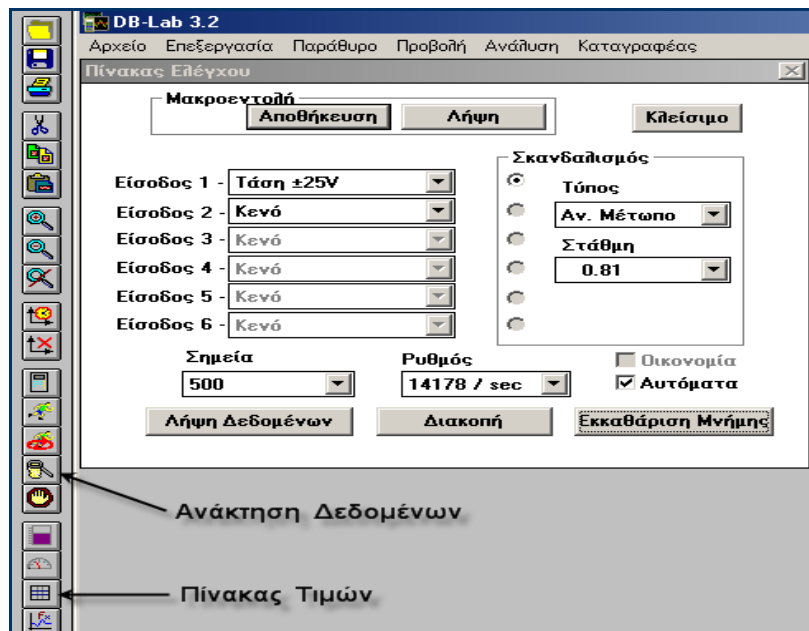
<sup>6</sup> Οι πυκνωτές είναι τύπου MKT. Ο πυκνωτής των  $95\mu\text{F}$  είναι παράλληλος συνδυασμός μικρότερων.



Σχ. 2 Το βασικό κύκλωμα παραγωγής και καταγραφής ηλ. ταλαντώσεων

Ο διακόπτης Δ2 πρέπει να είναι “μαχαιρωτός” ώστε να ελαχιστοποιούνται οι αναπηδήσεις<sup>7</sup> όταν κλείνει . Ο Δ1 είναι ένας πειστικός διακόπτης (κλειστός μόνο όταν πιέζεται) .


Ανοίγουμε τον καταγραφέα ,συνδέουμε τον αισθητήρα τάσης ( $\pm 25V$ ) στην είσοδο 1, και στον υπολογιστή ανοίγουμε το πρόγραμμα DB-Lab. Στο παράθυρο που παρουσιάζεται επιλέγουμε **Καταγραφέας** και μετά **Πίνακας Ελέγχου** όπου επιλέγουμε τον μέγιστο ρυθμό μετρήσεων 14178 μετρ./ δευτερόλεπτο και αριθμό μετρήσεων (σημεία ) 500. Επίσης επιλέγουμε σκανδαλισμό στο ανερχόμενο μέτωπο και στάθμη σκανδαλισμού 0,81V .



Εικόνα 1

Στη συνέχεια πατάμε **Εκκαθάριση Μνήμης** και **Λήψη Δεδομένων**. Τώρα ο καταγραφέας είναι έτοιμος να αρχίσει τις μετρήσεις τάσης μόλις η τάση στους ακροδέκτες του αισθητήρα υπερβεί τα 0,81V .<sup>8</sup>

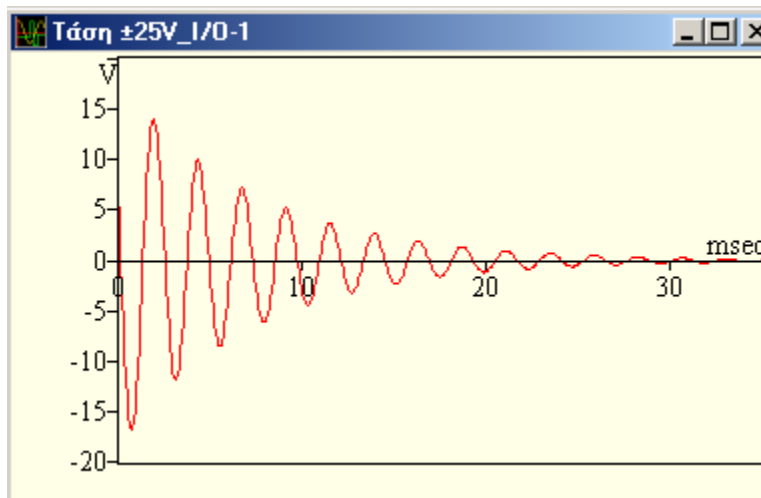
Το επόμενο βήμα είναι να πατήσουμε για λίγο τον διακόπτη Δ1 ώστε να φορτιστεί ο πυκνωτής. Κατόπιν κλείνουμε τον Δ2 οπότε ξεκινάει μια φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση η οποία διαρκεί λιγότερο από 1/20 του δευτερολέπτου. Στη διάρκεια της ταλάντωσης ο καταγραφέας μετράει και αποθηκεύει την στιγμιαία τάση του πυκνωτή με ρυθμό 1 μέτρηση κάθε 70μs. Έτσι καταγράφει ένα πίνακα τιμών με 500 χρονικές

στιγμές και τις αντίστοιχες στιγμιαίες τάσεις. Πατώντας **Ανάκτηση Δεδομένων**  στην αριστερή γραμμή εργαλείων ο πίνακας τιμών περνάει από τον καταγραφέα στον


<sup>7</sup> Όταν κλείνει ένας μηχανικός διακόπτης οι επαφές του αναπηδούν ανοιγοκλείνοντας για χρονικό διάστημα που κυμαίνεται από μερικά δέκατα του ms μέχρι αρκετά ms.

<sup>8</sup> Σύμφωνα με το εγχειρίδιο χρήσης του MultiLog η συνθήκη σκανδαλισμού δεν ελέγχεται συνέχεια αλλά κάθε 300μs ,οπότε είναι δυνατόν να χάσουμε μέχρι 4 μετρήσεις στην αρχή του φαινομένου.

υπολογιστή και το DB-Lab σχεδιάζει την γραφική παράσταση της τάσης ως προς το χρόνο που φαίνεται στο **Σχ.3** ( Έχουμε ρυθμίσει κατάλληλα από το μενού **Προβολή** την κλίμακα στον άξονα της τάσης και με τη λειτουργία zoom την κλίμακα στον άξονα του χρόνου )



**Σχ. 3** Η ταλάντωση της τάσης του πυκνωτή όπως την απεικονίζει το DB-Lab (C=15μF, L=10mH R=2,5Ω)

Ο πίνακας τιμών εμφανίζεται με πάτημα του προτελευταίου εικονιδίου  στην αριστερή γραμμή εργαλείων. Διατρέχοντας τον πίνακα τιμών ή τοποθετώντας δρομείς με αριστερό διπλό κλικ σε δύο σημεία τομής της καμπύλης με τον άξονα του χρόνου , υπολογίζουμε την περίοδο: T=2,4ms .Από την σχέση (5) για R=2.5Ω , L=10mH , C=15μF προκύπτει T=2,44ms . Έχουμε λοιπόν πολύ καλή συμφωνία θεωρητικής πρόβλεψης και πειραματικού αποτελέσματος. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε τα διαδοχικά μέγιστα της καμπύλης και να τα συγκρίνουμε με τα θεωρητικώς προβλεπόμενα των σχέσεων (8).

Ένας καλύτερος ίσως τρόπος συνολικής σύγκρισης της θεωρητικής πρόβλεψης και των πειραματικών αποτελεσμάτων είναι η σύγκριση της πειραματικής καμπύλης του **Σχ.3** με την γραφική παράσταση της σχέσης που προκύπτει από την (6) για

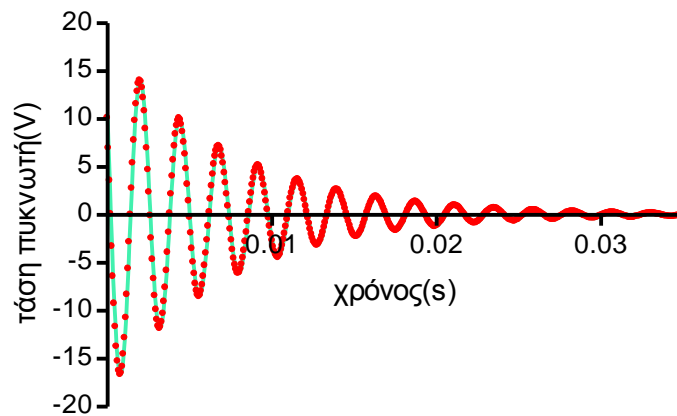
$V_0 = 20\text{Volts}$  ,  $R=2.5\Omega$  ,  $L=10\text{mH}$  ,  $C=15\mu\text{F}$  Η σχέση αυτή είναι η

$$V(t) = 20e^{-125t} \sigma\upsilon\nu(2579t) \quad (10)$$

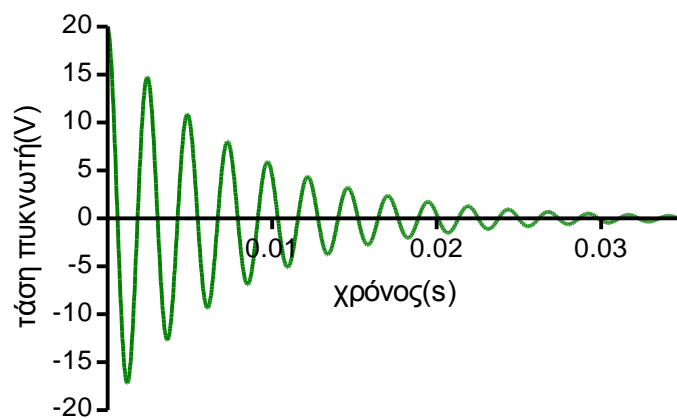
Το γράφημα της (10) μπορεί να γίνει μ' ένα πρόγραμμα γραφικών παραστάσεων σαν το εξαιρετικό **GraphPad Prism** (μια δοκιμαστική του έκδοση , πλήρως λειτουργική για 30 ημέρες, διατίθεται στον δικτυακό τόπο [www.graphpad.com](http://www.graphpad.com) ) ή με το **Excel**. Για να είναι η σύγκριση ευκολότερη σχεδιάζουμε και την πειραματική καμπύλη με το ίδιο πρόγραμμα , εξάγοντας τον πίνακα τιμών από το DB-Lab με τη μορφή αρχείου CSV (πατώντας Αρχείο>Εξαγωγή κτλ) και εισάγοντας τον στο **GraphPad Prism** . Στο **Σχ.4** φαίνονται τα πειραματικά σημεία και στο **Σχ.5** το γράφημα της (9). Είναι φανερή η καλή συμφωνία πειράματος και θεωρίας Βέβαια μια προσεκτική σύγκριση δείχνει ότι η ταλάντωση φθίνει λίγο γρηγορότερα από το θεωρητικώς προβλεπόμενο της (10) , λόγω κάποιων μικρών επιπλέον ενεργειακών απωλειών (λόγω ακτινοβολήσης , επιδερμικού φαινομένου κ.τ.λ.) Εδώ  $R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 52\Omega$  άρα

$$\frac{R}{R_{kp}} = \frac{2.5}{52} \approx \frac{1}{21} \quad \text{Από την (7) τότε προκύπτει ότι } \omega \approx \omega_0 \text{ με σφάλμα } 0,1\% \text{ παρ' ότι}$$

το “πλάτος” φθίνει αρκετά γρήγορα.



Σχ. 4 Πειραματική καταγραφή της ταλάντωσης της τάσης του πυκνωτή ( $C=15\mu\text{F}$ ,  $L=10\text{mH}$ ,  $R=2,5\Omega$ )



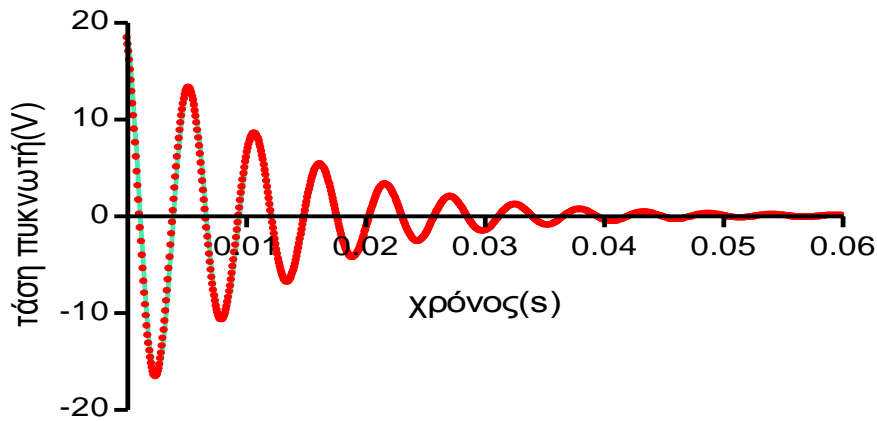
Σχ. 5 Η θεωρητικά προβλεπόμενη μεταβολή της τάσης του πυκνωτή ( $C=15\mu\text{F}$ ,  $L=10\text{mH}$ ,  $R=2,5\Omega$ )

Πηνίο με πυρήνα Στη συνέχεια βάζουμε στο πηνίο τον βραχύ σιδερένιο πυρήνα και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία παραγωγής ηλεκτρικής ταλάντωσης και καταγραφής της (αφού αυξήσουμε τον αριθμό μετρήσεων σε 1000). Παρατηρούμε (Σχ.6) μεγαλύτερη περίοδο  $T=5,5\text{ms}$  λόγω του ότι το πηνίο με τον πυρήνα έχει σημαντικά μεγαλύτερη αυτεπαγωγή. Μπορούμε από τα πειραματικά δεδομένα να υπολογίσουμε την αυτεπαγωγή αυτή καθώς και την συνολική αντίσταση απωλειών

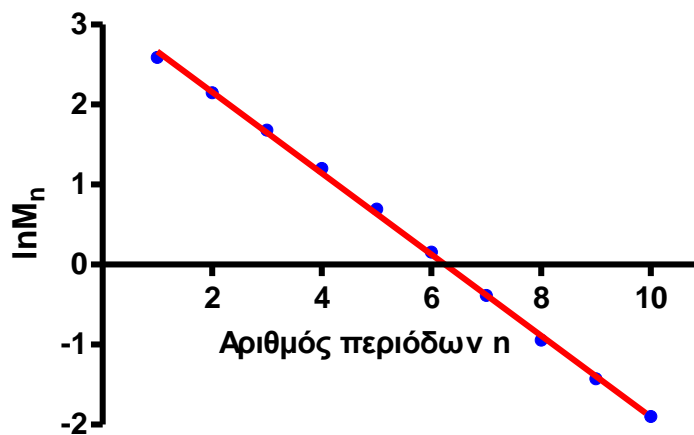
του πηνίου. Από την (8) προκύπτει  $\ln M_n = \ln V_0 - \frac{RT}{2L} n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (11). Από τον

πίνακα τιμών που μας δίνει το DB-Lab μπορούμε να βρούμε τα διαδοχικά μέγιστα της τάσης  $M_n$ ,  $n = 1, \dots, 10$ . Λόγω της (11) τα σημεία  $(n, \ln M_n)$ ,  $n = 1, \dots, 10$ , σε άξονες  $n$  (οριζόντιο) και  $\ln M_n$  (κατακόρυφο), πρέπει να βρίσκονται στην ίδια ευθεία που έχει κλίση  $-\frac{RT}{2L}$ . Φτιάχνουμε την ευθεία αυτή με το πρόγραμμα

**GraphPad Prism** το οποίο έχει την δυνατότητα να κάνει γραμμική παλινδρόμηση δηλ. να βρει την ευθεία που προσεγγίζει με βέλτιστο τρόπο τα σημεία  $(n, \ln M_n)$ ,  $n = 1, \dots, 10$  (Σχ.7)



Σχ. 6 Η ταλάντωση της τάσης του πυκνωτή όταν  $C=15\mu\text{F}$  ,  $L=51\text{mH}$  (με πυρήνα)



Σχ. 7

Από την κλίση της ευθείας στο Σχ.7 βρίσκουμε  $\frac{RT}{2L} = 0.508$  και από την (5)

προκύπτει  $\frac{1}{LC} = \frac{4\pi^2}{T^2} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ . Το σύστημα των δύο προηγούμενων σχέσεων με

$T=5,5\text{ms}$  και  $C=15\mu\text{F}$  δίνει σαν λύση  **$R=9.4\Omega$**  και  **$L=50.7\text{mH}$** .

Βλέπουμε ότι από την ανάλυση των πειραματικών δεδομένων προκύπτει για την αντίσταση του πηνίου τιμή σημαντικά μεγαλύτερη από την ωμική αντίσταση του σύματός του ( $2,5\Omega$ ). Η επιπλέον αντίσταση  $R' = 9,4\Omega - 2,5\Omega$  εκφράζει τις ενεργειακές απώλειες λόγω ρευμάτων Foucault και λόγω μαγνητικής υστέρησης στον σιδερένιο πυρήνα.

Διατηρώντας τώρα τον πυρήνα στο πηνίο, αντικαθιστούμε τον πυκνωτή των  $15\mu\text{F}$  με έναν χωρητικότητας  $1\mu\text{F}$  και επαναλαμβάνουμε τις προηγούμενες διαδικασίες. Έτσι καταγράφουμε μια φθίνουσα ταλάντωση μεγαλύτερης συχνότητας. Από την ανάλυση των δεδομένων, όπως προηγουμένως, προκύπτει για την αντίσταση του πηνίου τιμή  **$46\Omega$** .

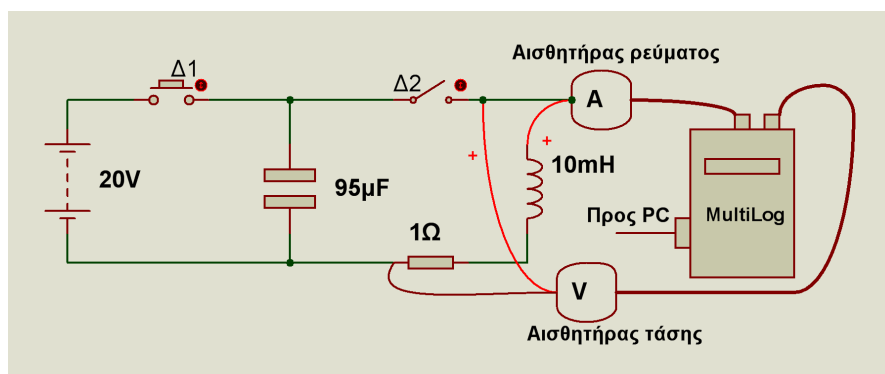
Υπάρχει λοιπόν ισχυρή εξάρτηση της αντίστασης απωλειών ενός πηνίου με πυρήνα από την συχνότητα του ρεύματος που το διαρρέει<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Από την ανάλυση των πειραματικών δεδομένων προκύπτουν ενδείξεις για εξάρτηση (ασθενέστερη όμως) και της αυτεπαγωγής πηνίου με πυρήνα από την συχνότητα ( το L μειώνεται αργά όταν αυξάνεται η συχνότητα)

Πώς μειώνεται η ενέργεια του ταλαντωτή Η ενέργεια του ηλεκτρικού ταλαντωτή είναι

$$\frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

Συνεπώς για να δούμε πειραματικά πώς μεταβάλλεται η ενέργεια θα πρέπει εκτός από την τάση να καταγράψουμε και την χρονική μεταβολή του ρεύματος  $i$ . Έτσι συνδέουμε στον καταγραφέα, στην είσοδο 2, και τον αισθητήρα έντασης ρεύματος ( $\pm 2,5A$ ). Οι ακροδέκτες των αισθητήρων συνδέονται στο κύκλωμα όπως στο **Σχ.8**. Ο μέγιστος ρυθμός δειγματοληψίας του MultiLog με τους δύο αισθητήρες πέφτει στις 6172 μετρ./δευτερόλεπτο δηλ. 1 μέτρηση κάθε 162 $\mu s$ . Για ν' αποφύγουμε πιθανή απώλεια κάποιων λεπτομερειών στην καταγραφή του φαινομένου κάνουμε πιο αργή την ταλάντωση βάζοντας στη θέση του αρχικού πυκνωτή άλλον χωρητικότητας 95 $\mu F$ . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως για την παραγωγή και καταγραφή ηλεκτρικής ταλάντωσης, μεταφέρουμε τον πίνακα τιμών<sup>10</sup> από το DB-Lab στο πρόγραμμα γραφημάτων που χρησιμοποιούμε και παίρνουμε τις καμπύλες του **Σχ.9**.



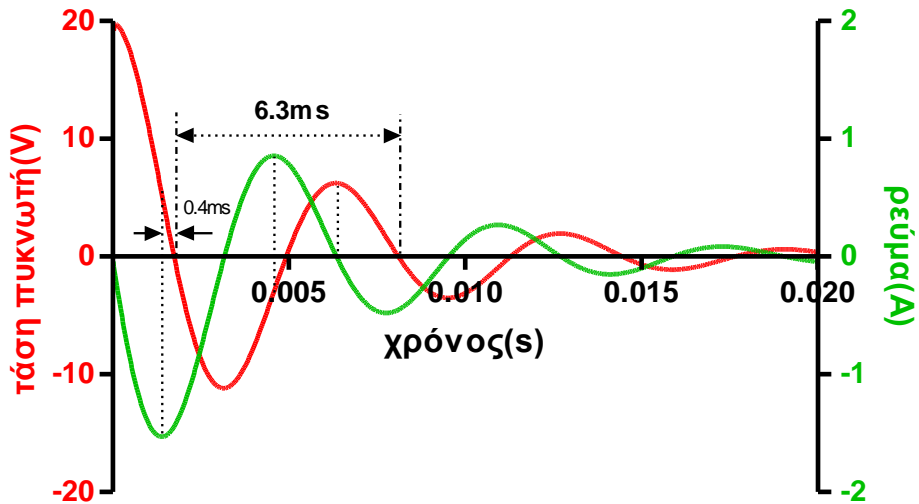
**Σχ. 8 Ταυτόχρονη καταγραφή τάσης πυκνωτή και ρεύματος**

Για να κατασκευάσουμε τώρα την γραφική παράσταση της ενέργειας ως προς το χρόνο, πρέπει από τον πίνακα τιμών που δίνει το DB-Lab, για κάθε ζεύγος  $(V, i)$

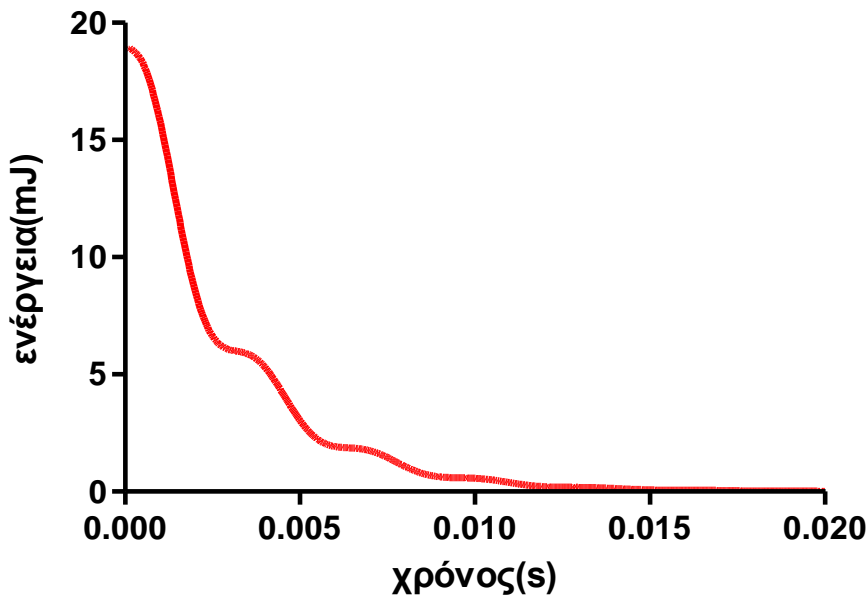
τιμών τάσης και ρεύματος, να υπολογίσουμε το  $\frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}Li^2$  με  $C = 95\mu F$  και

$L = 10mH$ . Αυτό το επιτυγχάνουμε εξάγοντας τον πίνακα τιμών σαν αρχείο CSV από το DB-Lab και εισάγοντάς τον στο Excel. Το Excel έχει τη δυνατότητα από δύο στήλες A και B με τιμές  $A_i$  και  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  να φτιάξει μια τρίτη στήλη με τιμές  $K * A_i^2 + \Lambda * B_i^2$ , (K,  $\Lambda$  ρητοί). Έτσι φτιάχνουμε ένα πίνακα τιμών με τις χρονικές στιγμές των μετρήσεων και τις αντίστοιχες τιμές της ενέργειας. Από τον πίνακα αυτόν με το Excel ή κάποιο πρόγραμμα γραφημάτων σαν το GraphPad κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση της ενέργειας.

<sup>10</sup> Το ότι μειώνεται ο μέγιστος ρυθμός δειγματοληψίας όταν συνδέεται και δεύτερος αισθητήρας στο MultiLog σημαίνει ότι υπάρχει ένας μόνο μετατροπέας αναλογικού σε ψηφιακό (ADC) στον καταγραφέα, οπότε οι μετρήσεις τάσης και ρεύματος δεν γίνονται ταυτόχρονα αλλά διαδοχικά. Για να έχουμε λοιπόν τιμές τάσης και ρεύματος που αντιστοιχούν στην ίδια περίπου χρονική στιγμή μετακινούμε στον πίνακα τιμών που δίνει το DB-Lab όλες τις τιμές του ρεύματος κατά μια γραμμή προς τα πάνω (αυτό μπορεί να γίνει εύκολα στο Excel).



Σχ. 9 Οι καμπύλες τάσης πυκνωτή και ρεύματος όταν  $C=95\mu\text{F}$  ,  $L=10\text{mH}$  ,  $R=3,5\Omega$

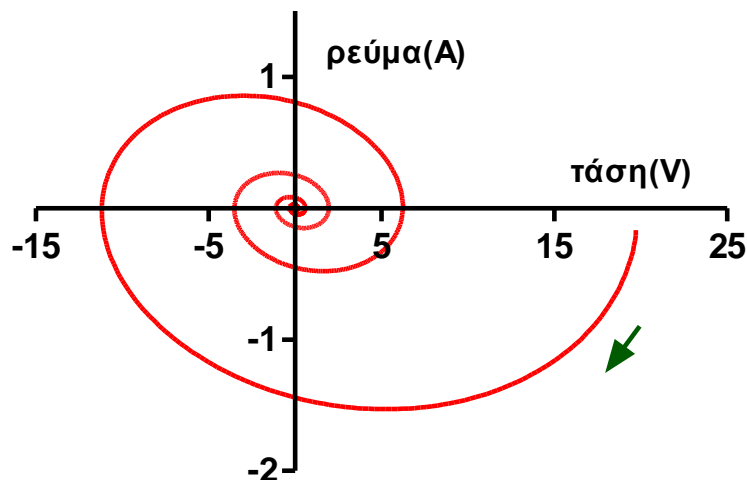


Σχ. 10 Η καμπύλη της ενέργειας του ηλ. ταλαντωτή ( $C=95\mu\text{F}$ ,  $L=10\text{mH}$ ,  $R=3,5\Omega$ )

Βλέπουμε ότι πράγματι η καμπύλη της ενέργειας “οριζοντιώνεται” τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται το ρεύμα οπότε μηδενίζεται ο ρυθμός απωλειών  $-i^2 R$  .

Από το Σχ.9 βλέπουμε ότι τα μέγιστα και τα ελάχιστα του ρεύματος συμβαίνουν λίγο πριν τους μηδενισμούς της τάσης. Επίσης παρατηρούμε ότι κάθε ακρότατο της τάσης είναι χρονικά πιο κοντά στον προηγούμενο μηδενισμό της , απ’ ότι στον επόμενο.

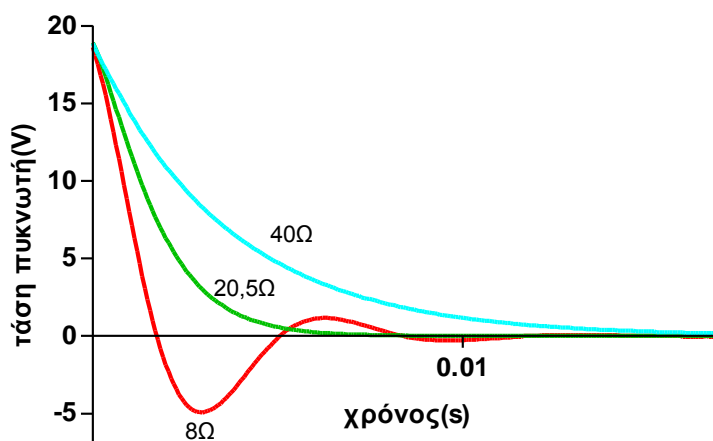
Το ότι το ρεύμα γίνεται μέγιστο πριν τους μηδενισμούς της τάσης φαίνεται ίσως καλύτερα στο φασικό διάγραμμα της ταλάντωσης δηλ. στην καμπύλη της οποίας τα σημεία έχουν σαν συντεταγμένες τις στιγμιαίες τιμές τάσης πυκνωτή και ρεύματος (Σχ.11)



Σχ. 11. Φασικό διάγραμμα της ταλάντωσης του Σχ.9

### Πώς συμπεριφέρεται το κύκλωμα LC με $R \geq R_{κρ}$ , μετά από διέγερσή του

Στο κύκλωμα του Σχ.1 αντικαθιστούμε τον αρχικό πυκνωτή μ' αυτόν των 95μF. Μεταξύ των “κάτω” άκρων πυκνωτή και πηνίου παρεμβάλουμε σε σειρά ποτενσιόμετρο 100Ω συνδεδεμένο σαν μεταβλητή αντίσταση. Για  $L=10\text{mH}$  και  $C=95\mu\text{F}$  η κρίσιμη αντίσταση είναι  $R_{κρ}=20,5\Omega$ . Ρυθμίζουμε την μεταβλητή αντίσταση (με την βοήθεια πολυμέτρου) ώστε η συνολική αντίσταση στο κύκλωμα να είναι 20,5Ω. Με τον Δ2 ανοικτό πιέζουμε για λίγο τον Δ1 και φορτίζουμε τον πυκνωτή. Στη συνέχεια κλείνουμε τον Δ2 και καταγράφουμε με το MultiLog , όπως έχουμε περιγράψει ,την μεταβολή της τάσης του πυκνωτή. Μεταφέρουμε τον πίνακα τιμών στον υπολογιστή και τον αποθηκεύουμε. Επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα και για τιμές συνολικής αντίστασης 8Ω και 40Ω . Στη συνέχεια μεταφέρουμε τους τρεις πίνακες τιμών με την μορφή αρχείων CSV στο πρόγραμμα γραφημάτων που χρησιμοποιούμε και κατασκευάζουμε τις καμπύλες του Σχ.12



Σχ. 12 (L=10mH , C=95μF)

Η κόκκινη καμπύλη (8Ω) παριστάνει ταλάντωση της τάσης με μεγάλη απόσβεση , ενώ οι άλλες δύο δεν παριστάνουν ταλαντώσεις καθώς δείχνουν τάσεις που επιστρέφουν ασυμπτωτικά στο μηδέν χωρίς αλλαγή προσήμου

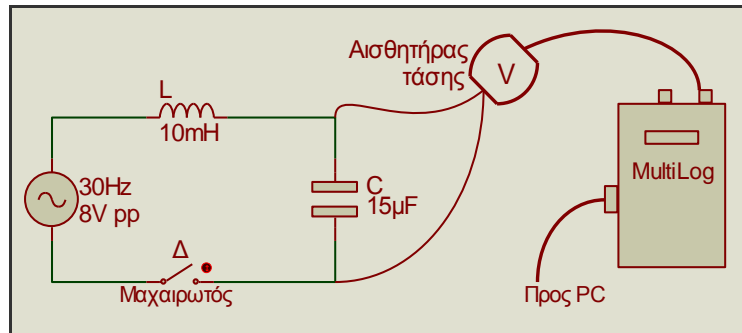
Από την σύγκριση των τριών καμπυλών προκύπτει ότι ο χρόνος για την πλήρη απόσβεση της αρχικής διέγερσης είναι ελάχιστος όταν  $R = R_{κρ} = 20,5\Omega$ .

Το προηγούμενο ισχύει και γενικότερα : Ένα σύστημα που μπορεί να κάνει ταλαντώσεις , επανέρχεται μετά από μια διέγερση στην κατάσταση ισορροπίας στον

ελάχιστο χρόνο , όταν η απόσβεση είναι κρίσιμη . Αυτό λαμβάνεται υπ' όψη στο σχεδιασμό κτιρίων , αμορτισέρ κτλ.

.....

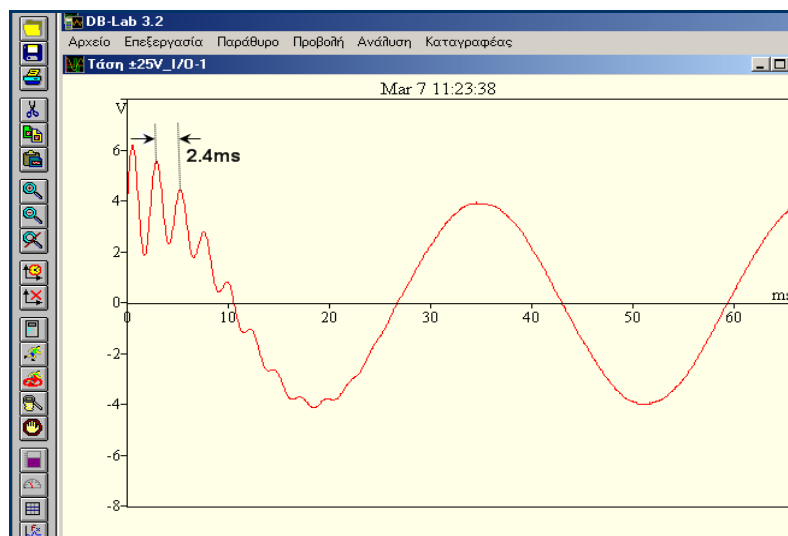
Θα τελειώσουμε τεκμηριώνοντας πειραματικά κάτι που αναφέραμε στην εισαγωγή , ότι δηλαδή μια εξαναγκασμένη ταλάντωση στην έναρξή της συνυπάρχει για λίγο με μια φθίνουσα. Πραγματοποιούμε το κύκλωμα του **Σχ.13** Η γεννήτρια συχνοτήτων ,



**Σχ. 13**

που είναι ρυθμισμένη να δίνει ημιτονοειδή εναλλασσόμενη τάση με πλάτος 4V και συχνότητα 30Hz , θα λειτουργήσει σαν διεγέρτης . Το MultiLog ρυθμίζεται να κάνει 1000 μετρήσεις με ρυθμό 14178μετρ./δευτ. (δηλ. 1 μέτρηση κάθε 70μs ) και με αυτόματη έναρξη μετρήσεων (σκανδαλισμό ) μόλις η τάση στους ακροδέκτες του αισθητήρα υπερβεί τα 0,81Volt.

Κλείνουμε τον διακόπτη Δ και το MultiLog καταγράφει την τάση του πυκνωτή για  $1000 \times 70\mu s = 70ms$ . Μεταφέρουμε τον πίνακα τιμών στον υπολογιστή και το DB-Lab δίνει την καμπύλη του **Σχ.14**<sup>11</sup>



**Σχ. 14**

Παρατηρούμε ότι στην εξαναγκασμένη ταλάντωση των 30Hz υπερτίθεται για λίγο μια πιο γρήγορη φθίνουσα. Βάζοντας δρομείς σε δυο διαδοχικά μέγιστα της ταλάντωσης αυτής βρίσκουμε την περίοδό της ,  $T = 2,4ms$  , που δεν είναι παρά η περίοδος της ελεύθερης ταλάντωσης των  $L = 10mH$  και  $C = 15\mu F$ .

Στην έναρξη λοιπόν μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης διεγείρεται και μια ελεύθερη ταλάντωση του ταλαντωτή.

<sup>11</sup> Θα πρέπει να πούμε ότι αν επαναλάβουμε την καταγραφή αρκετές φορές θα πάρουμε διαφορετικές μεταξύ τους καμπύλες γιατί έχει σημασία η φάση της τάσης της γεννήτριας τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης.