

Ανοικτή Επιστολή Προς την Επιτροπή Θεμάτων της Φυσικής Κατεύθυνσης

Επειδή λαμβάνουμε πολλά παράπονα από συναδέλφους διορθωτές σύμφωνα με τα οποία η επιτροπή των θεμάτων του υπουργείου απορρίπτει απόλυτα τη λύση του ερωτήματος B2 μέσω των στασίμων κυμάτων αλλά και τη λύση του Γ4 μέσω των ταλαντώσεων θα θέλαμε την απάντησή τους στηριγμένη αρχικά στο σχολικό βιβλίο (το οποίο **βασει του νομού είναι το μόνο** που ο μαθητής υποχρεώνεται να γνωρίζει) αλλά και στη διεθνή πανεπιστημιακή βιβλιογραφία αν θεωρούν ότι διαφωνούν σε κάποιο σημείο με τα παρακάτω. Όπως και να έχει όμως θα πρέπει η επιτροπή να συνειδητοποιήσει ότι όχι μόνο οι υποδειγματικές λύσεις που στέλνει θα πρέπει να στηρίζονται στο σχολικό βιβλίο αλλά θα πρέπει και να ενθαρρύνει τους διορθωτές να αποδέχονται σαν σωστή την κάθε λύση η οποία είναι σωστά τεκμηριωμένη με βάση το σχολικό βιβλίο. Ακόμα και **στην περίπτωση κατά την οποία το σχολικό βιβλίο δεν είναι απόλυτα σωστό**.

1. Το ερώτημα B2

Το συγκεκριμένο ερώτημα θα μπορούσε να λυθεί και γεωμετρικά π.χ. καθώς ο μαθητής γνώριζε τον αρχικό αριθμό των δεσμών και μπορούσε πολύ εύκολα να υπολογίσει τον υποτριπλασιασμό του μήκους κύματος. Κατά τη γνώμη μας και η λύση αυτή είναι απόλυτα σωστή καθώς στηρίζεται στο σχολικό βιβλίο.

Εμείς με βάση τα ακόλουθα υποστηρίζουμε ότι στο συγκεκριμένο φαινόμενο στην ευθεία ανάμεσα στις πηγές ορθώς ο μαθητής χρησιμοποίησε στάσιμα κύματα, αρκεί να δικαιολόγησε επαρκώς την απάντησή του.

Και αυτό γιατί: Σαν στάσιμα κύματα ορίζει το σχολικό βιβλίο (και πολύ σωστά κατά τη γνώμη μας) **δύο κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας τα οποία καθώς διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο με αντίθετη φορά συμβάλλουν**. Μάλιστα με τα μαύρα γράμματα τονίζει: **Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με αντίθετες κατευθύνσεις**.

Το θέμα B2 των Πανελληνίων εξετάσεων του 2013 ανέφερε:

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 που βρίσκονται αντίστοιχα στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας υγρού παράγουν πανομοιότυπα εγκάρσια κύματα με ίδιο πλάτος ίσες συχνότητες f_1 και ίσα μήκη κύματος λ_1 . Αν η απόσταση των σημείων Κ και Λ είναι $d = 2\lambda_1$ τότε δημιουργούνται τέσσερις υπερβολές απόσβεσης ανάμεσα στα σημεία Κ και Λ.

Πολλοί μαθητές θεώρησαν ότι ανάμεσα στα Κ και Λ αναπτύσσονται στάσιμα κύματα. Είναι σωστή αυτή η προσέγγισή τους;

Αρχικά από κάποιους συναδέλφους διατυπώνεται η αντίρρηση ότι **στάσιμα κύματα έχουμε μόνο σε γραμμικό μέσο** (χορδή). Αυτή είναι μια πολύ σωστή παρατήρηση κατά το ήμισυ. Το ερώτημα είναι τι είναι γραμμικό μέσο. Οι Halliday- Resnick στην 8η έκδοσή τους (η οποία τώρα μεταφράζεται στα ελληνικά) (σελ. 546) αναφέρουν: When analyzing a linear medium, that is, one in which the restoring force acting on the particles of the medium is proportional to the displacement of the particles, we can

apply the principle of superposition to determine the resultant disturbance. Δηλαδή γραμμικό μέσο είναι αυτό στο οποίο η δύναμη που ασκείται στα σωματίδια του μέσου είναι ανάλογη της μετατόπισης τους. **Αυτό είναι το γραμμικό μέσο που αναφέρει η βιβλιογραφία και όχι κατ' ανάγκη μια χορδή. Συνεπώς σαν γραμμικό μέσο θεωρούμε το κάθε μέσο στο οποίο ισχύει η αρχή της επαλληλίας.** Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται η αρχή της επαλληλίας για κάθε ελαστικό μέσο. Συνεπώς ο μαθητής οφείλει να θεωρεί το κάθε ελαστικό μέσο γραμμικό. Επομένως καθώς στάσιμα κύματα εμφανίζονται σε όλους τους ανοικτούς ή κλειστούς ηχητικούς σωλήνες είναι προφανώς και ο αέρας γραμμικό μέσο. **Προφανώς είναι και το υγρό της άσκησης γραμμικό μέσο καθώς σε αυτό ισχύει η αρχή της επαλληλίας (εφόσον δεχόμαστε ότι ισχύει η συμβολή).**

Όμως αυτά δεν είναι ανάγκη να τα ξέρουν οι μαθητές. Οι μαθητές απαιτείται να γνωρίζουν βάσει του νόμου το σχολικό βιβλίο. Σε αυτό δίνεται μεν σαν παράδειγμα η χορδή αλλά δεν αναφέρεται περιορισμός στο μέσο.

Ένας συνάδελφος που έχει συναίσθηση της αποστολής του και που το μόνο που θα τον ενδιέφερε θα ήταν να αποδώσει δικαιοσύνη στους μαθητές ανάλογα με τα γραπτά τους θα έθετε μόνο την εξής ερώτηση: **Βάσει του ορισμού που γνωρίζουν οι μαθητές από το σχολικό βιβλίο δικαιολογείται η θέση τους πως στην ευθεία ανάμεσα στις πηγές αναπτύσσονται στάσιμα κύματα;** Ο ορισμός θέτει τις εξής προϋποθέσεις:

- (α') Τα δυο κύματα να είναι όμοια (ίδιο πλάτος, ίδια συχνότητα). **ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ .**
- (β') Τα δύο κύματα να κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. **ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ.**
- (γ') Τα δύο κύματα να διαδίδονται στο ίδιο μέσο και να συμβάλλουν. **ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ**

Συνεπώς **ικανοποιούνται και οι τρεις προϋποθέσεις που θέτει το σχολικό βιβλίο.** Επομένως σύμφωνα με τις γνώσεις του μαθητή είναι στάσιμα κύματα.

Κάποιοι μάλιστα συνάδελφοι διαχώρισαν το φαινόμενο της συμβολής από αυτό των στασίμων κυμάτων. Ακόμα και σωστό να ήταν αυτό ο ορισμός του σχολικού βιβλίου δείχνει ότι τα στάσιμα κύματα είναι υποπερίπτωση της συμβολής. Σε αυτό συμφωνεί και η διεθνής βιβλιογραφία (π.χ. Alonso-Finn - Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική, Ελληνική Έκδοση, 3ος τόμος, σελ 230).

Επίσης κάποιοι άλλοι χρησιμοποιούν το εξής επιχείρημα: **Στις πηγές έχουμε πρόβλημα και γι αυτό η εικόνα δεν είναι στάσιμο κύμα αλλά είναι συνθήκες στάσιμου κύματος.** Η πρόθεση αυτών των συναδέλφων είναι ολοφάνερη. Επειδή τέτοιος ορισμός (δηλαδή διαχωρισμός του φαινομένου των στασίμων κυμάτων από μια κατάσταση που μοιάζει με στάσιμο κύμα αλλά δεν είναι) δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, στόχος είναι να μεταφέρουν τη συζήτηση μακριά από τις γνώσεις του μαθητή σε δήθεν επιστημονικό επίπεδο. Η απάντηση είναι προφανής:

- (α') **Υπάρχει διεθνής βιβλιογραφία η οποία κάνει αυτό το διαχωρισμό;** Αν ναι τότε αυτοί οι συνάδελφοι που στο συγκεκριμένο θέμα θέλουν να αποδείξουν ότι το σχολικό βιβλίο κάνει λάθος θα πρέπει να την παρουσιάσουν. Άσχετα με αυτό πάντως οι μαθητές δεν είναι υποχρεωμένοι να διαβάζουν πανεπιστημιακά συγγράμματα πριν δώσουν πανελλήνιες εξετάσεις. Συνεπώς ακόμα και αν το σχολικό βιβλίο κάνει λάθος οι μαθητές δεν υποχρεώνονται να το ξέρουν. **Τότε όμως η επιτροπή είναι διπλά υπόλογη καθώς επέλεξε θέμα στο οποίο στο σχολικό βιβλίο υπάρχει πρόβλημα.** Αυτό ως προς τη δεοντολογία.

- (β') Αν το γεγονός πως η ενέργεια του δεύτερου κύματος όταν φθάνει στην πηγή του πρώτου την επηρεάζει με αποτέλεσμα να υπάρχει πρόβλημα καθώς η πηγή δεν ταλαντώνεται με το πλάτος του στάσιμου αλλά με το δικό της, η απάντηση είναι πως το ίδιο συμβαίνει και στη συμβολή. Αν λοιπόν έχουμε συμβολή αλλά όχι στάσιμο όπως η επιτροπή υποστηρίζει τότε πάνω στην πηγή έχουμε πρόβλημα καθώς το πλάτος της ταλάντωσης της πηγής θα είναι (από τη θεωρία της συμβολής και όχι του στάσιμου)

$$A' = 2A \left| \sin \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} \right| \quad \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_1 = 2\lambda \end{matrix} \iff A' = 2A \left| \sin \frac{2\pi 2\lambda}{\lambda} \right| = 2A \quad (1)$$

Συνεπώς και εδώ θα έχουμε πρόβλημα στις πηγές, άρα δεν έχουμε συμβολή αλλά συνθήκες συμβολής και όλη η άσκηση είναι λάθος. Συνεπώς οι εξισώσεις που χρησιμοποιούμε δεν περιλαμβάνουν τις πηγές ούτε στη συμβολή ούτε και στο στάσιμο. Αυτό δε σημαίνει ότι το αμέσως επόμενο σημείο από τις πηγές παραβιάζει τις εξισώσεις. Κάποιος θα μπορούσε να μας πει ότι αφού η πηγή είναι στη θέση της κοιλίας αλλά δεν είναι κοιλία δεν έχουμε στάσιμα. Η απάντηση αυτή είναι παράλογη γιατί τότε το φαινόμενο θα άλλαζε ανάλογα με το αν στο τμήμα του χώρου που μελετάμε συμπεριλαμβανουμε τις πηγές ή όχι. Όπως θα δούμε και παρακάτω ένας μαθητής θα μπορούσε να υπολογίσει τους δεσμούς ξεκινώντας από τη μεσοκάθετο που είναι όντως κοιλία και να μην εμπλέξει τις πηγές. Αν λοιπόν αυτός ο μαθητής μελετούσε το χώρο $-0.05\lambda < x < 1.96\lambda$ (δηλαδή μια περιοχή του χώρου που δεν υπάρχουν πηγές αλλά μόνο δύο όμοια τρέχοντα αντίθετα κύματα) ποιο φαινόμενο θα παρατηρούσε; Σύμφωνα με τη λογική των συναδέλφων ο μαθητής θα είχε στάσιμα κύματα ή συνθήκες στάσιμων κυμάτων; Βλέπουμε πόσο η φυσική μπερδεύεται όταν σχεδιάζουμε προβλήματα εκτός πραγματικότητας. Και τέτοια προβλήματα είναι όλα τα προβλήματα που μελετούν κύματα ξεχνώντας ότι αυτά δημιουργήθηκαν από πηγές. Γιατί όμως δεν μας ενδιαφέρει αν ένα σημείο είναι η πηγή; **Γιατί πολύ απλά στην Αρχή της Επαλληλίας θεωρούμε ότι το ένα κύμα είναι ανεξάρτητο από το άλλο.** Συνεπώς ακόμα και αν ένα σημείο είναι η πηγή το δεύτερο κύμα θα περάσει από εκεί ανεξάρτητα από τι συμβαίνει στο πρώτο. Δηλαδή το $2A$ που βρήκαμε παραπάνω οφείλεται σύμφωνα με την Αρχή της Επαλληλίας κατά το μισό στην πηγή η οποία είναι ένας μηχανισμός που μεταφέρει ενέργεια στο μέσο και κατά το άλλο μισό στην ενέργεια του δεύτερου κύματος που φτάνει σε αυτό το σημείο. Η προσέγγιση αυτή ισχύει για όλες τις περιπτώσεις συμβολής και κατά συνέπεια και για την υποπερίπτωση των στασίμων κυμάτων. Εξάλλου σύμφωνα με την Αρχή του Huygens κάθε σημείο του κύματος μπορεί να θεωρηθεί σαν μια δευτερογενής πηγή. Τότε όλος ο χώρος θα αποτελείται από πηγές. Πως λοιπόν θα μπορούσαμε να μελετήσουμε το φαινόμενο αν εξαιρούσαμε τα σημεία των πηγών;

- (γ') Επειδή όμως στη φύση τα κύματα δεν δημιουργούνται μόνα τους αλλά πάντα θα έχουμε πηγές κυμάτων στις οποίες όταν θα φθάνει η ενέργεια του δευτερου κυματος αυτές θα συνεχίζουν να ταλαντώνονται με το δικό τους πλάτος με τη λογική των συναδέλφων δεν θα υπάρχουν ποτέ στάσιμα κύματα (ή συμβολή όπως αποδείξαμε παραπάνω) αλλά μόνο συνθήκες στασίμων κυμάτων ή συμβολής.

- (δ') Τι αναφέρει όμως η διεθνής βιβλιογραφία;

- Oi Alonso-Finn (Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική, Ελληνική Έκδοση, 3ος τόμος, σελ 256) αναφέρουν ξεκάθαρα ότι σε ανοικτούς και κλειστούς ηχητικούς σωλήνες όταν φυσάμε από το ένα του άκρο δημιουργούνται **στάσιμα κύματα στο εσωτερικό τους** (το στόμα μας

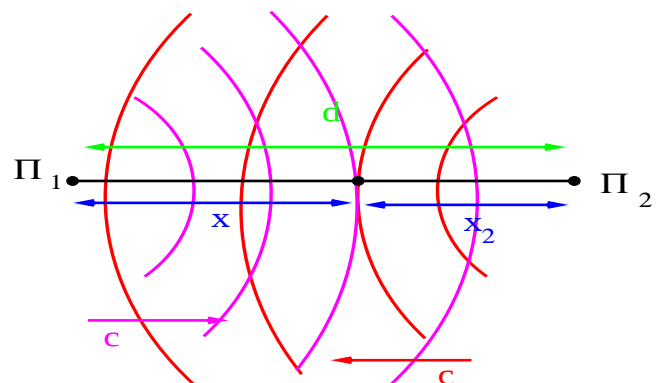
είναι προφανώς η πηγή των στασίμων κυμάτων) εξαιτίας της ανάκλασης των κυμάτων στο άλλο άκρο. Επίσης στο σχήμα 22.16 (σελ. 252) αναφέρονται σε στάσιμα κύματα σε μια χορδή που έχει και τα δύο άκρα στερεωμένα.

- ii. Οι Halliday- Resnick (Ελληνική έκδοση της Β έκδοσης τους, Α Τόμος σελ 483) αναφέρουν ότι σε μια χορδή πεπερασμένου μήκους τα τρέχοντα κύματα παθαίνουν ανάκλαση στα άκρα της χορδής παράγοντας στάσιμα κύματα. Του συγγραφέας δεν τους ενοχλεί πως προφανώς κάπου ανάμεσα στα δύο άκρα, δηλαδή κάπου στο χώρο που μελετούν υπάρχει η πηγή (η οποία μπορεί να βρίσκεται και σε μια κοιλία). Οι συγγραφείς αναφέρουν χαρακτηριστικά ότι η επαλληλία ενός προσπίπτοντος κύματος και ενός ανακλώμενου , όντας το άθροισμα δύο κυμάτων που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις θα δημιουργήσει ένα στάσιμο κύμα. Στην 8η έκδοση τους (η οποία τώρα μεταφράζεται στα ελληνικά) ,(σελ 550 της αγγλικής έκδοσης) αναφέρεται: A standing wave, such as the one shown in Figure 18.4, is an oscillation pattern with a stationary outline that results from the superposition of two identical waves traveling in opposite directions. Μάλιστα στο σχήμα 18.6 (σελ. 552) παρουσιάζεται η εικόνα ενός στάσιμου κύματος (standing wave pattern) σε μια χορδή πακτωμένη και στα δύο άκρα με ένα επιπλέον δεσμό. Προφανώς κάπου εκεί μέσα υπάρχει και η πηγή αλλά αυτό δεν ενοχλεί τους συγγραφείς. Όπως και δεν τους ενοχλεί που θα βάλει κάποιος το $x = 0$. Μάλιστα η παράγραφος 18.3 έχει ακριβώς αυτό τον τίτλο: STANDING WAVES IN A STRING FIXED AT BOTH ENDS.
- iii. Ο Pain (Ελληνική Έκδοση της Φυσικής των ταλαντώσεων και των Κυμάτων, σελ 134) μελετά και αυτός τη δημιουργία στασίμων κυμάτων σε χορδή πεπερασμένου μήκους στο εσωτερικό της οποίας προφανώς βρίσκεται και η πηγή. Αναφορά και εδώ σε “συνθήκες στασίμων κυμάτων” αλλά όχι στάσιμα κύματα δεν υπάρχουν.
- iv. Ο Hecht (Physics: Algebra-Trig., Brooks-Cole Publishing Company, 1994) στη σελίδα 458 αναφέρει τα ίδια. Στη δε σελίδα 462, πολλαπλά παραδείγματα με ανοικτούς και κλειστούς σωλήνες

Στη βιβλιογραφία αυτή αναφέρεται πάντα ότι όταν δύο όμοια κύματα κινούνται αντίθετα στο ίδιο (γραμμικό) μέσο παράγουν στάσιμα κύματα. Πουθενά δεν αναφέρεται όρος συνθήκες στασίμων κυμάτων αλλά όχι στάσιμα κύματα.

Μήπως όμως το σχολικό βιβλίο κάνει λάθος και δεν έχουμε στάσιμα κύματα; Ας δούμε και τη μαθηματική επεξεργασία. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται δύο πηγές που απέχουν απόσταση $d = 2\lambda$ όπως έδινε η άσκηση. Η κάθε πηγή παράγει ένα κύμα

$$\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) & \Pi_1 \\ y_2 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) & \Pi_2 \end{aligned} \quad (2)$$



Και στις δύο εξισώσεις έχουμε αρνητικό πρόσημο στο χωρικό τμήμα της φάσης γιατί πάντα η φάση μεικράίνει καθώς το κύμα απομακρύνεται από την πηγή.

Η συμβολή των δύο κυμάτων μας δίνει:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\
 y_2 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) \\
 y &= y_1 + y_2 \iff y = A[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{N\lambda - x}{\lambda}\right)] \iff \\
 x_2 &= d - x \\
 d &= N\lambda \\
 y &= A[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \eta\mu(2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) - 2N\pi)] = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Που είναι η εξίσωση των στασίμων κυμάτων. Συνεπώς **σωστά οι μαθητές περιέγραψαν το φαινόμενο σαν στάσιμα κύματα.**

Κάποιοι όμως συνάδελφοι εξακολουθούν να το αρνούνται υποστηρίζοντας ότι όλο αυτό έτυχε καθώς η απόσταση των δυο πηγών ήταν ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος. Προσπερνώντας το γεγονός πως στην άσκηση που δόθηκε η απόσταση ήταν 2λ συνεπώς ανήκει στην προηγούμενη περίπτωση,ας μελετήσουμε και τη γενική περίπτωση: Αν η απόσταση ήταν γενικά d τότε θα είχαμε

$$\begin{aligned}
 y_1 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\
 y_2 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) \iff y = A[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d - x}{\lambda}\right)] \iff \\
 y &= y_1 + y_2 \\
 x_2 &= d - x \\
 y &= A[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \eta\mu(2\pi\left(\frac{t}{T} + x\lambda\right) - \frac{d}{\lambda}2\pi)] = 2A\sigma\upsilon\nu[-\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi d}{\lambda}]\eta\mu[\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi d}{\lambda}] \quad (4)
 \end{aligned}$$

Μη μας ξεγελά η εξίσωση επειδή δεν είναι ακριβώς όμοια με αυτή του σχολικού βιβλίου. Είναι εξίσωση στασίμων κυμάτων καθώς η αρμονική συμπεριφορά λόγω θέσης είναι απόλυτα διαχωρισμένη από την χρονική αρμονική συμπεριφορά. Συνεπώς κάθε σημείο κάνει ταλάντωση με συγκεκριμένο πλάτος διαφορετικό

από το διπλανό του. Αν μάλιστα θέσω σαν αρχή το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $\frac{d}{2}$ δηλαδή έχω $x_1 = x - \frac{d}{2}$ και $t_1 = t - \frac{d}{2c}$ όπου c η ταχύτητα διάδοσης του κύματος (ουσιαστικά ο χρόνος που

χρειάστηκε από τη μια πηγή να φτάσει στη μεσοκάθετο που θεωρήσαμε αρχή των αξόνων), τότε:

$$y = 2A\sigma\sigma\nu\left[-\frac{2\pi(x_1 + \frac{d}{2})}{\lambda} + \frac{\pi d}{\lambda}\right]\eta\mu\left[\frac{2\pi(t_1 - \frac{d}{2c})}{T} + \frac{\pi d}{\lambda}\right] = 2A\sigma\sigma\nu\frac{2\pi x_1}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t_1}{T} \quad (5)$$

Που είναι η εξίσωση του στάσιμου κύματος του σχολικού βιβλίου. Συνεπώς το σχολικό βιβλίο σωστά αναφέρεται σε στάσιμα κύματα στο χώρο ανάμεσα σε δυο πηγές που παράγουν όμοια κύματα που κινούνται αντίθετα. Απλά οι μαθητές θα πρέπει να είναι προσεκτικοί ώστε πάντα το $x = 0$ να είναι κοιλία, συνθήκη που ικανοποιείται για τις πηγές όταν $d = N\lambda$.

Οι δεσμοί θα βρίσκονται στο σημείο

$$\begin{aligned} \sigma\sigma\nu\left[-\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi d}{\lambda}\right] = 0 &\iff \left[-\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi d}{\lambda}\right] = (2N+1)\frac{\pi}{2} \iff \\ x &= \frac{d}{2} - (2N+1)\frac{\lambda}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

Αυτό μας θυμίζει την εικόνα της συμβολής καθώς στη μεσοκάθετο $x = d/2$ έχουμε ενίσχυση και από εκεί ανά $\lambda/4$ διαδοχικά θα συναντάμε απόσβεση και ενίσχυση.

Μέ βάση αυτά θα μπορούσε ένας μαθητής να πει το εξής πολύ σωστό (και να μη χρειαστεί να ασχοληθεί καθόλου με το τι συμβαίνει στο $x = 0$): Καθώς τα στάσιμα κύματα είναι υποπερίπτωση της συμβολής και εγώ γνωρίζω ότι στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τις δύο πηγές έχω πάντα ενίσχυση άρα θα έχω κοιλία στο σημείο αυτό στην εικόνα του στασίμου κύματος. Συνεπώς αφού το νέο μήκος

κύματος είναι $\frac{\lambda}{3}$ σε απόσταση από τη μεσοκάθετο $x = \frac{1}{4}\frac{\lambda}{3} = \frac{\lambda}{12}$ έχω τον πρώτο δεσμό. Οι υπόλοιποι

ακολουθούν σε απόσταση $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{3} = \frac{\lambda}{6}$ ο καθένας. Συνεπώς από τη μεσοκάθετο μέχρι τη μια πηγή θα

έχω 6 δεσμούς. Και άλλους τόσους από τη μεσοκάθετο μέχρι την άλλη πηγή, το σύνολο 12. Με αυτή την απόλυτα σωστή λύση ο μαθητής θα έδειχνε ότι έχει καταλάβει τη σύνδεση στασίμων κυμάτων και συμβολής πολύ περισσότερο και από κάποιους συναδέλφους.

2. Το ερώτημα Γ4

Η συνηθισμένη λύση γι αυτό το ερώτημα είναι μέσω της **Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας** (όχι της μηχανικής ενέργειας **καθώς καταναλώνει έργο η μη συντηρητική δύναμη της τριβής**). **Οι μαθητές γνωρίζουν την ΑΔΕ μέσα από το Θεώρημα Έργου Ενέργειας ή αλλιώς Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας.** Το πρόβλημα το οποίο ανακύπτει σε αυτό το ερώτημα είναι ότι **οι μαθητές δεν είχαν εκπαιδευθεί σε αντίστοιχα ερωτήματα στη διάρκεια της Λυκειακής τους Εκπαίδευσης**, δηλαδή ενώ γνωρίζουν τη γενική έκφραση του ΘΜΚΕ, δεν είχαν εκπαιδευθεί σε προβλήματα με έργο ελατηρίου και έργο τριβής ολίσθησης. Αντίθετα οι μαθητές κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης **είχαν εκπαιδευθεί σε προβλήματα ταλαντώσεων** ακόμα και όταν μια δύναμη που είναι σταθερή σε μέτρο και διεύθυνση όπως το βάρος (αλλά όπως και η τριβή στο τμήμα της κίνησης για το οποίο τους ζητήθηκε να βρεθεί η μέγιστη συσπείρωση

του ελατηρίου) δρά ταυτόχρονα με το ελατήριο. Επίσης στη διάρκεια της λυκειακής τους εκπαίδευσης οι μαθητές εκπαιδεύθηκαν να μελετούν ακόμα και **τμήματα κινήσεων**. Παράδειγμα η γνωστή άσκηση όπου μια μικρή σφαίρα κινείται σε ένα ημισφαίριο. Υπάρχει άσκηση η οποία ζητά από το μαθητή να υπολογίσει την κάθετη αντίδραση του ημισφαιρίου όταν η σφαίρα περνά από την κατώτατη θέση της κίνησης της. Σε αυτή την περίπτωση **ο μαθητής αναγνωρίζει ότι η σφαίρα εκτελεί τμήμα κυκλικής κίνησης (και όχι όλη την κυκλική κίνηση)** και εφαρμόζει τους νόμους που γνωρίζει για την κυκλική κίνηση στο συγκεκριμένο τμήμα υπολογίζοντας αυτό που του ζητήθηκε. Ο μαθητής ποτέ δεν έχει ενδιαφερθεί για το γεγονός πως το σώμα από ένα σημείο και πέρα **μπορεί να μην ολοκληρώσει την κυκλική κίνηση καθώς μπορεί και να αλλάξει είδος κίνησης**.

Στο ερώτημα Γ4 υπήρξαν μαθητές όπως μαθαίνουμε από συναδέλφους οι οποίοι θεώρησαν ότι η κίνηση του σώματος από την κρούση μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά είναι τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης και εφαρμόζοντας τους γνωστούς νόμους των αμείωτων αρμονικών ταλαντώσεων υπολόγισαν σωστά τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου. Θα πρέπει αυτοί οι μαθητές (εφόσον αναγνώρισαν σωστά ότι είναι τμήμα ταλάντωσης αλλά η Θέση Κρούσης δεν ταυτίζεται με τη Θέση Ισορροπίας) να τιμωρηθούν ή να ανταμειφθούν βαθμολογικά;

Η άποψη μας είναι ότι πρέπει η λύση τους να θεωρηθεί απόλυτα σωστή **γιατί είναι απόλυτα σωστή φυσικά**. Η μαθηματική επεξεργασία είναι η ακόλουθη: Σε μια τυχαία θέση το σώμα δέχεται δύο δυνάμεις στον άξονα της κίνησης, τη δύναμη του ελατηρίου και τη δύναμη της τριβής που είναι και οι δύο αντίθετες στην ταχύτητα. Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{aligned} ma &= -kx - T \\ T &= \mu mg \quad \Longleftrightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -\mu mg \Longleftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = -\mu g \\ a &= \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση. Η λύση της είναι ένα άθροισμα της ομογενούς και μια μερικής λύσης (που εδώ επειδή ο παράγοντας που μετατρέπει την εξίσωση σε μη ομογενή είναι σταθερός θα είναι μια σταθερά C). Η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η γενική λύση μιας αμείωτης αρμονικής ταλάντωσης. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x &= -\mu g \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Longleftrightarrow -\omega^2 A \eta \mu(\omega t + \phi) + \omega^2 A \eta \mu(\omega t + \phi) + \omega^2 C = -\mu g \Longleftrightarrow C = \frac{-\mu g}{\omega^2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi) + C$$

Επομένως η λύση του προβλήματος θα είναι

$$\begin{aligned} x &= A \eta \mu(\omega t + \phi) - \frac{\mu g}{\omega^2} \quad \Longleftrightarrow x + \frac{\mu g}{\omega^2} = A \eta \mu(\omega t + \phi) \Longleftrightarrow x' = A \eta \mu(\omega t + \phi) \\ x' &= x + \frac{\mu g}{\omega^2} \end{aligned} \quad (9)$$

που είναι μια εξίσωση αρμονική αμείωτης ταλάντωσης με αλλαγμένη τη θέση ισορροπίας (όπως θα φανεί ξεκάθαρα και στη λυκειακή μελέτη που θα παρουσιάσουμε πιο κάτω).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Και αν κάποιος αμφιβάλλει ότι ακόμα και σε αυτή την περίπτωση για την οποία υπάρχει τριβή ολίσθησης μπορούμε να ορίσουμε δυναμική ενέργεια, θυμίζουμε ότι για να ορισθεί δυναμική ενέργεια θα πρέπει ο στροβιλισμός της δύναμης να είναι μηδενικός. Εδώ η δύναμη της ταλάντωσης είναι $\vec{F} = m\vec{a}$. Συνεπώς

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (\partial F_z \partial y - \partial F_y \partial z)\hat{x} + (\partial F_x \partial z - \partial F_z \partial x)\hat{y} + (\partial F_y \partial x - \partial F_x \partial y)\hat{z} \iff \vec{F} = F_x \hat{x}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (10)$$

Συνεπώς μπορεί να ορισθεί δυναμική ενέργεια U από τη σχέση: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ όπως ακριβώς και στη συνηθισμένη περίπτωση.

Κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί πως μπορεί η κίνηση να είναι τμήμα αμείωτης ταλάντωσης τη στιγμή που η τριβή καταναλώνει έργο. Μα και στο πρώτο τέταρτο μιας κατακόρυφης ταλάντωσης στην οποία η φορά της ταχύτητας είναι προς τα πάνω το βάρος καταναλώνει έργο (το οποίο βέβαια επιστρέφει στο επόμενο τέταρτο). Στη συγκεκριμένη περίπτωση καθώς μελετάμε μόνο ένα τμήμα της ταλάντωσης δεν υπάρχει αυτή η επιστροφή του έργου αλλά αυτό δεν επηρεάζει το γεγονός πως η κίνηση είναι τμήμα μιας τέτοιας ταλάντωσης. Επίσης δεν πρέπει να ξεχνάμε πόσες φορές έχει χρησιμοποιήσει ο μαθητής τη διατήρηση της ενέργειας σε τέτοια τμήματα ταλαντώσεων (πχ. υπολογισμός πλάτους από τη Θέση Ισορροπίας μέχρι την Πρώτη Θέση Μέγιστης Απομάκρυνσης) χωρίς να μας απασχολεί ότι σε αυτό το τέταρτο της ταλάντωσης το έργο του βάρους είναι καταναλισκόμενο.

Κάποιος άλλος συνάδελφος μπορεί να αναρωτηθεί πως θα το καταλάβει ένας μαθητής ότι είναι ταλάντωση χωρίς να λύσει τις διαφορικές εξισώσεις.

Ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει τα εργαλεία που ξέρει για τις κατακόρυφες ταλαντώσεις μέσα σε πεδίο βαρύτητας. Η θέση Β είναι η θέση κρούσης, η θέση Δ είναι η θέση ισορροπίας και η θέση Γ είναι μια τυχαία θέση. Στη θέση ισορροπίας:

$$\begin{aligned} T &= F_{\epsilon\lambda} \\ T &= \mu mg \iff x_0 = \frac{\mu mg}{l} \\ F_{\epsilon\lambda} &= kx_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Στην τυχαία θέση:

$$F_{ελ,1} = k(x - x_0)$$

$$T = \mu mg \quad \Longleftrightarrow \quad \sum F = -kx \quad (12)$$

$$\sum F = -(T + F_{ελ,1})$$

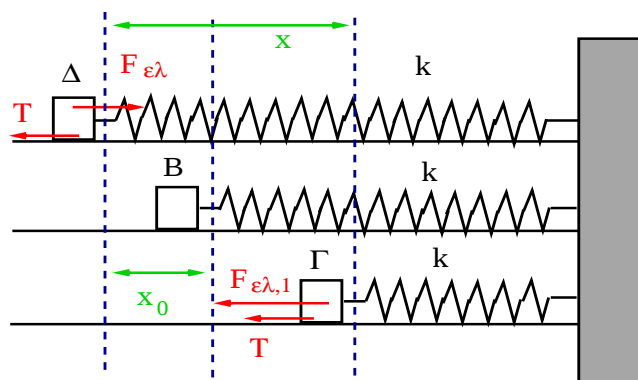
Επομένως το σώμα για αυτό το τμήμα της κίνησης του εκτελεί ταλάντωση με σταθερά k .

Στη συνέχεια ο μαθητής αφού έχει αποδείξει ότι το σώμα για αυτό και μόνο το τμήμα της τροχιάς του εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση με σταθερά k μπορεί να υπολογίσει το πλάτος της ταλάντωσης με την διατήρηση της ενέργειας (παρατηρώντας ότι αρχικά το σώμα απέχει x_0 από τη θέση ηρώσης). Επομένως:

$$\frac{(m + M)V^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

Το ζητούμενο μέγεθος είναι

$$A_1 = A - x_0$$



Σ. Ασημακόπουλος

Μ. Βαβάσης

Β. Καράβολας

Σ. Κοκκωνάκης

Γ. Παυλικάκης

Κ. Τσεφαλάς