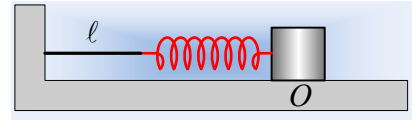


Μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος.

Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο στη θέση Ο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=20\text{N/m}$, όπως στο σχήμα, όπου το ελατήριο συνδέεται με κατακόρυφο τοίχο με νήμα μήκους $l=1\text{m}$, το οποίο είναι τεντωμένο. Εκτρέπουμε το σώμα προς τα δεξιά κατά $(\pi/5)\text{m}$ και τη στιγμή $t_0=0$, το αφήνουμε να κινηθεί. Λαμβάνοντας τη θέση Ο ως αρχή του άξονα ($x=0$) και θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση, να βρεθούν:



- i) Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
- ii) Η χρονική στιγμή t_1 όπου θα σταματήσει η προς τα αριστερά κίνηση του σώματος.
- iii) Η εξίσωση της θέσης του σώματος, σε συνάρτηση με το χρόνο ($x_1=f(t)$), μέχρι τη στιγμή t_1 . Να γίνει και η αντίστοιχη γραφική.
- iv) Αν σε μια άλλη περίπτωση, το σώμα εκτελούσε κίνηση με εξίσωση:

$$x=x_1+2\cdot\sin(\pi t)$$

όπου x_1 η θέση του σώματος κατά την παραπάνω κίνηση, να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2=0,75\text{s}$.

Δίνεται $\pi^2\approx 10$.

Απάντηση:

- i) Μόλις το σώμα αφεθεί να κινηθεί εκτελεί ΑΑΤ, μέχρι που να επανέλθει στη θέση Ο. Πράγματι αν πάρουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει κατά x , από τη θέση Ο, θα έχουμε:

$$\Sigma F = -F_{ελ} = -kx$$

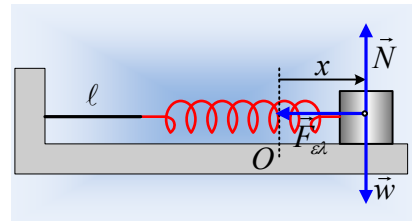
$$\text{Οπότε } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{2}} \text{ rad/s} \approx \pi \text{ rad/s}$$

Λαμβάνοντας δε υπόψη ότι το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με την αρχική απομάκρυνση, αφού το σώμα αφήνεται να κινηθεί με μηδενική αρχική ταχύτητα, παίρνουμε:

$$v_{\max} = \omega A = \pi \cdot \frac{\pi}{5} \text{ m/s} = 2\text{ m/s}$$

- ii) Μόλις το σώμα φτάσει στη θέση Ο, το ελατήριο αποκτά το φυσικό μήκος του, το νήμα παύει να είναι τεντωμένο και το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, συμπαρασύροντας και το ελατήριο κατά την κίνησή του. Αυτό θα συνεχίζεται μέχρι που το αριστερό άκρο του ελατηρίου, φτάσει στον τοίχο, οπότε θα αρχίζει να συσπειρώνεται, ασκώντας δύναμη στο σώμα και επιβραδύνοντάς το. Για να φτάσει το αριστερό άκρο του ελατηρίου στον τοίχο θα χρειαστεί το σώμα να μετακινηθεί κατά 1m αριστερά της θέσης Ο, ή αν προτιμάτε, θα πρέπει να έρθει στη θέση $x=-1\text{m}$, κινούμενο με ταχύτητα $v_{\max}=-2\text{m/s}$, οπότε:

$$\Delta x = v_{\max} \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x}{v_{\max}} = \frac{-1\text{m}}{-2\text{m/s}} = 0,5\text{s}$$



Μόλις το ελατήριο έρθει σε επαφή με τον τοίχο, το σώμα ξεκινά μια νέα ΑΑΤ, γύρω από τη θέση $x_2 = -1\text{m}$, η οποία είναι η νέα θέση ισορροπίας του, ξεκινώντας με μέγιστη ταχύτητα, συνεπώς θα χρειαστεί χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = 0,5\text{s}$ μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του. Με βάση αυτά η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά τη στιγμή:

$$t_1 = \frac{T}{4} + \Delta t_1 + \Delta t_2 = 0,5\text{s} + 0,5\text{s} + 0,5\text{s} = 1,5\text{s}$$

iii) Από $0-t_1$ το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με εξίσωση απομάκρυνσης:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Όπου για $t=0$, οπότε $A = A \cdot \eta\mu\varphi_0$, οπότε $\varphi_0 = \pi/2$ και η εξίσωση γίνεται:

$$x = \left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Στο διάστημα $0,5\text{s} < t < 1\text{s}$, το σώμα κινείται ευθύγραμμα ομαλά με ταχύτητα $v = -v_{\max}$ και η εξίσωση της θέσης του δίνεται από την εξίσωση:

$$x = v \cdot \Delta t = -2(t - 0,5) \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

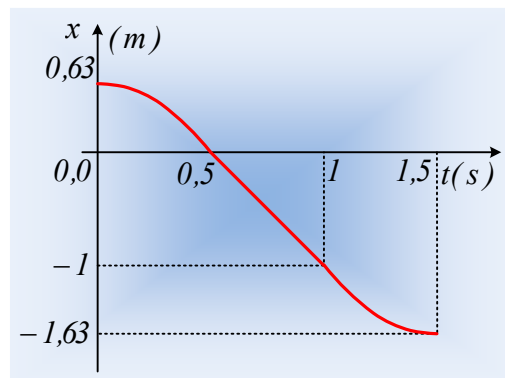
Τέλος στο χρονικό διάστημα $1\text{s} \leq t \leq 1,5\text{s}$ το σώμα εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από τη θέση $x_2 = -1\text{m}$ ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση, συνεπώς με αρχική φάση π , οπότε η θέση του δίνεται από την εξίσωση:

$$x = x_2 + A_1 \cdot \eta\mu(\omega t' + \varphi_{01})$$

Αλλά $v_{\max} = \omega A_1 \rightarrow A_1 = A = \left(\frac{\pi}{5}\right)\text{m}$ αφού ξανά $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \pi \text{ rad/s}$ και $t' = t - 1\text{s}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$x = -1 + \left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \eta\mu(\pi(t-1) + \pi) = -1 + \left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \eta\mu(\pi t) \quad (\text{S.I.}) \quad (3)$$

Με βάση τα παραπάνω η γραφική παράσταση της θέσης, είναι:



iv) Η στιγμή t_2 βρίσκεται στο χρονικό διάστημα $0,5\text{s} \leq t \leq 1\text{s}$, οπότε η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι:

$$x = x_1 + 2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t) = -2(t - 0,5) + 2 \cdot \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Η κίνηση δηλαδή του σώματος θα μπορούσε να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο κινήσεων, μιας ευθύγραμμης ομαλής με ταχύτητα μέτρου 2m/s και μιας ΑΑΤ. Αλλά τότε κάθε στιγμή η ταχύτητά του θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των δύο ταχυτήτων, εξαιτίας των δύο αυτών κινήσεων:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\text{Όπου } v_2 = \omega A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = \pi \cdot 2 \cdot \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \cdot \sin\left(0,75\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$v_2 = 2\pi \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\pi\sqrt{2}\text{m/s}$$

Αλλά τότε η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t_2 είναι:

$$v = v_1 + v_2 = -2\text{m/s} - \pi\sqrt{2}\text{m/s} \approx 6,4\text{m/s}$$

dmargaris@gmail.com