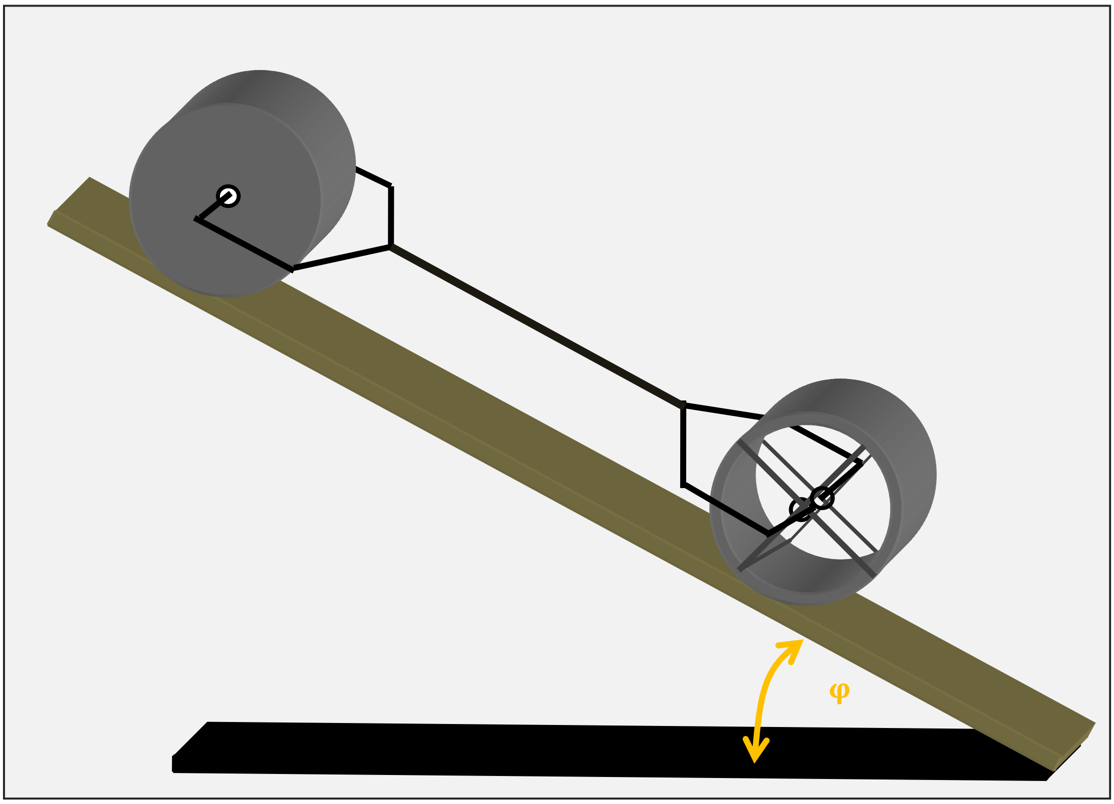
Δίτροχο κινούμενο σε κεκλιμένο επίπεδο

Το δίτροχο του σχήματος αφήνεται από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου τη χρονική στιγμή $t = 0$. Το όλο σύστημα που συνδέει τους τροχούς έχει αμελητέο βάρος και στους



άξονες περιστροφής οι τριβές θεωρούνται ασήμαντες. Οι τροχοί είναι ομογενείς με την ίδια μάζα m και την ίδια ακτίνα R. Το κεκλιμένο επίπεδο σχηματίζει γωνία $\varphi = \frac{\pi}{4}$ με το οριζόντιο επίπεδο και εμφανίζει συντελεστή τριβής με τους τροχούς $\mu = \mu_s = 0{,}5$.

Δίδονται οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες $I_1 = mR^2$ και $I_2 = \frac{mR^2}{2}$ για τον κάτω και πάνω τροχό αντίστοιχα. Επίσης δίνεται ότι $g = 10\,\frac{m}{s^2}$.

1. Υπολογίστε την επιτάχυνση του συστήματος.
2. Βρείτε τις συναρτήσεις των ταχυτήτων των σημείων επαφής των τροχών με το κεκλιμένο επίπεδο σε σχέση με το χρόνο.
3. Αν $m = 0{,}6Kg$ βρείτε το ρυθμό παραγωγής θερμότητας σε συνάρτηση με το χρόνο.
4. Τι ποσό θερμότητας θα έχει παραχθεί από τη χρονική στιγμή μηδέν μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 2s$;

Απάντηση

1.

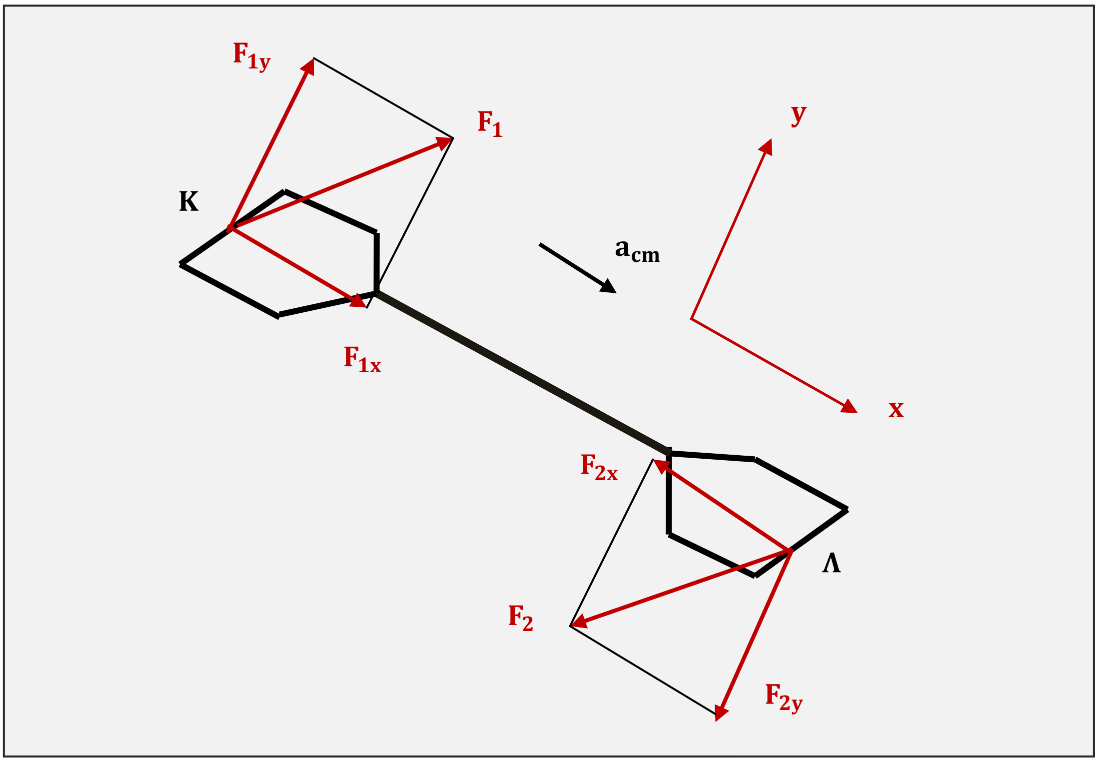
Επειδή το σύστημα σύνδεσης θεωρείται αβαρές $\Sigma F_x = 0 \iff$

$$\mathbf{F_{1x} = F_{2x} = F}$$

Επίσης επειδή το σύστημα δε στρέφεται $\Sigma\tau_{(K)} = \Sigma\tau_{(\Lambda)} = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{K}\Lambda)\mathrm{F}_{1y} = (\mathrm{K}\Lambda)\mathrm{F}_{2y} = 0$

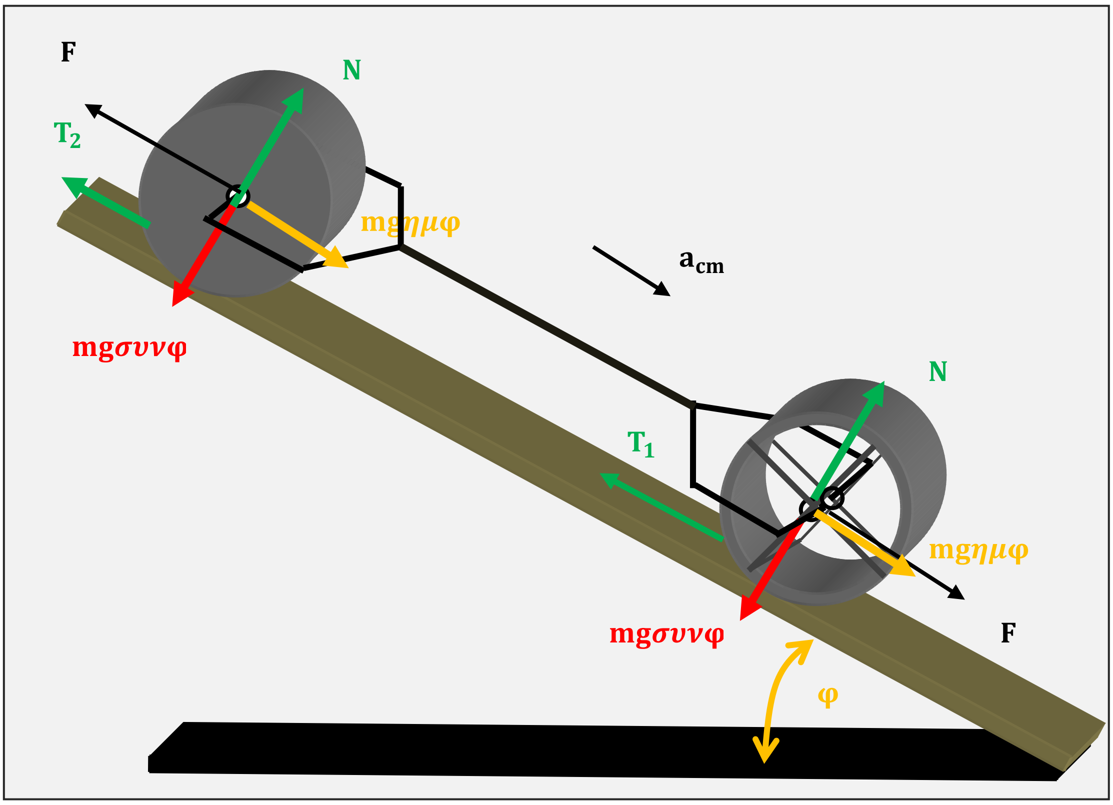
$$\mathbf{F_{1y} = F_{2y} = 0}$$

Δηλαδή τελικά οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ τροχών κα συστήματος θα είναι παράλληλες στο



κεκλιμένο επίπεδο και θα έχουν το ίδιο μέτρο **F**

Οδηγούμαστε λοιπόν στο παρακάτω σχήμα:



Η οριακή τριβή που συμπίπτει με την τριβή ολίσθησης είναι

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\text{ορ}} = \mu \mathrm{mg}\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{mg}\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ίδια και για στους δυο τροχούς.

Θεωρούμε αρχικά ότι <u>κανείς τροχός δεν υφίσταται ολίσθηση</u> και γράφουμε τις εξισώσεις της μεταφορικής και της στροφικής κίνησης για τον κάθε ένα.

Κάτω τροχός

$$\mathrm{mg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{F} - \mathrm{T}_1 = \mathrm{ma}_{\mathrm{cm}}$$

$$\mathrm{RT}_1 = \mathrm{mR}^2\alpha_\gamma \ \Rightarrow$$

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{ma}_{\mathrm{cm}}$$

Και η πρώτη σχέση γράφεται

$$\mathrm{mg}\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{F} = 2\mathrm{ma}_{\mathrm{cm}} \qquad (1)$$

Πάνω τροχός

$$\mathrm{mg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{F} - \mathrm{T}_1 = \mathrm{ma}_{\mathrm{cm}}$$

$$\mathrm{RT}_2 = \frac{\mathrm{mR}^2}{2}\alpha_\gamma \ \Rightarrow$$

$$\mathrm{T}_2 = \frac{\mathrm{ma}_{\mathrm{cm}}}{2}$$

$$\mathrm{mg}\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{F} = \tfrac{3}{2}\mathrm{ma}_{\mathrm{cm}} \qquad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2)

$$\mathrm{a}_{\mathrm{cm}} = \frac{2\mathrm{g}\sqrt{2}}{7}$$

Αφαιρώντας

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{ma}_{\mathrm{cm}}}{4}$$

Αλλά

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2\mathrm{gm}\sqrt{2}}{7} = \frac{\mathrm{gm}\sqrt{2}}{3{,}5} > mg\frac{\sqrt{2}}{4} = \mathrm{T}_{\text{ορ}}$$

Άρα η <u>υπόθεση μας δεν ευσταθεί</u>, ο κάτω τροχός θα υφίσταται και ολίσθηση.

Μανώλης Λαμπράκης

Για τον άλλο τροχό

$$T_2 = \frac{gm\sqrt{2}}{7} < mg\frac{\sqrt{2}}{4} = T_{ορ}$$

Δηλαδή ο πάνω τροχός είναι <u>πιθανόν να μην ολισθαίνει</u>.

Θεωρούμε ότι ο <u>κάτω τροχός υφίσταται και ολίσθηση ενώ ό πάνω όχι</u>.

Για τον κάτω τροχό τώρα

$$T_1 = T = T_{ορ} = mg\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$mg\frac{\sqrt{2}}{4} + F = ma_{cm}$$

$$3mg\frac{\sqrt{2}}{2} = 5ma_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{3g\sqrt{2}}{10} = 3\sqrt{2}\frac{m}{s^2}$$

Για τον πάνω τροχό

$$T_2 = \frac{3mg\sqrt{2}}{20} = \frac{3}{5}mg\frac{\sqrt{2}}{4} < mg\frac{\sqrt{2}}{4} = T_{ορ}$$

Άρα η τελευταία υπόθεση μας είναι σωστή, <u>ο κάτω τροχός θα ολισθαίνει κυλιόμενος ενώ ο πάνω θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει</u>.

Η επιτάχυνση του δίτροχου θα είναι

$$\mathbf{a_{cm} = 3\sqrt{2}\frac{m}{s^2}}$$

2.

Ο πάνω τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει άρα το σημείο του που βρίσκεται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο έχει μηδενική ταχύτητα ως προς αυτό

$$\mathbf{υ_2 = 0}$$

Το σημείο επαφής του κάτω τροχού συμμετέχει στη μεταφορική κίνηση του τροχού με ταχύτητα $υ_{cm} = a_{cm}t = \frac{3g\sqrt{2}}{10}t$ και στη στροφική κίνηση του τροχού με γραμμική ταχύτητα $υ_E = α_E t$

Υπολογίζουμε την $α_E$ (μέτρο)

$$TR = mR^2α_γ$$

$$T = mRα_γ = mα_E$$

$$mg\frac{\sqrt{2}}{4} = m\alpha_E$$

$$\alpha_E = g\frac{\sqrt{2}}{4}$$

οπότε

$$\upsilon_E = -g\frac{\sqrt{2}}{4}t \text{ (αλγεβρική τιμή)}$$

και

$$\upsilon_1 = \upsilon_{cm} + \upsilon_E = g\frac{\sqrt{2}}{20}t$$

Συνεπώς η ταχύτητα του σημείου του κάτω τροχού που βρίσκεται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο θα είναι

$$\boldsymbol{\upsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}t \quad (S.I.)}$$

3.

Οι «απώλειες σε θερμότητα θα οφείλονται στην τριβή ολίσθησης του κάτω τροχού. Έτσι

$$\frac{dQ}{dt} = |T\upsilon_1| = \frac{mg}{4}t$$

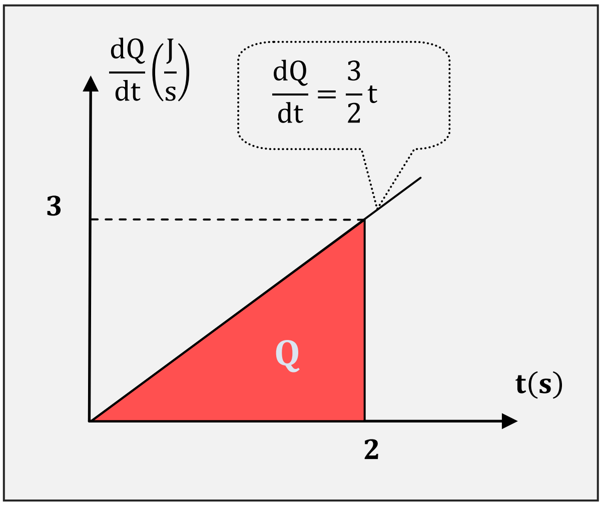
και για τις δοσμένες τιμές

$$\boldsymbol{\frac{dQ}{dt} = \frac{3}{2}t \quad (S.I.)}$$

4.

Από το χρωματισμένο εμβαδόν του διαγράμματος έχουμε

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}3\frac{J}{s}2s = \mathbf{3J}$$



Εναλλακτικά θα μπορούσαμε από το $\upsilon_1 - t$ διάγραμμα της $\upsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}t$ να βρούμε το $x_{ολίσθ} = \sqrt{2}m$ οπότε

$$\mathbf{Q} = |W_T| = |Tx_{ολίσθ}| = \cdots \mathbf{3J}$$

Και επίσης το $x_{ολίσθ}$ θα μπορούσαμε να το είχαμε υπολογίσει ως

$$x_{ολίσθ} = x_{μεταφ} - x_{στροφ} = \sqrt{2}m.$$

Μανώλης Λαμπράκης