

# 3

## ΑΠΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ:

Για την λύση των ασκήσεων που ακολουθούν θα χρειασθούμε:

1. Την (διάσημη) εξίσωση του ΕΙΝΣΤΕΙΝ:

$$E = mc^2$$

2. Τον νόμο των STEFAN-BOLTZMANN:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

(Ακτινοβολία μέλανος σώματος)

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΦΥΣΙΚΟΣ

MSc. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2011

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

## ΑΣΚΗΣΗ 1

Τα πιο ισχυρά quasars έχουν φωτεινότητα περίπου  $10^{40}$  W. Πόση ποσότητα μάζας ανά δευτερόλεπτο πρέπει να καταναλώνει η κεντρική μελανή οπή για να παράγει αυτή τη φωτεινότητα; Υπολογίστε πόσες ηλιακές μάζες καταβροχθίζει η μελανή οπή σ' ένα έτος. Υποθέστε ότι μόνο το 10% της μάζας που καταναλώνεται ακτινοβολείται.

### ΛΥΣΗ

Η κεντρική μελανή οπή έχει «απόδοση» 10% , δηλαδή συντελεστή (απόδοσης)  $\eta = 0,1$ . Επομένως για να έχει το quasar φωτεινότητα  $10^{40}$  W, η οπή πρέπει να «καταβροχθίζει» μάζα με τέτοιο ρυθμό ώστε να αντιστοιχεί σε ισχύ:

$$P = \frac{10^{40}}{0,1} W = 10^{41} W = 10^{41} \frac{J}{s}$$

Έτσι λοιπόν σε 1 s , η κατανάλωση μάζας από την μαύρη τρύπα θα είναι:

$$mc^2 = P \Rightarrow m = \frac{P}{c^2} \Rightarrow m = \frac{10^{41} \frac{J}{s}}{(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s})^2} \Rightarrow m = 1,11 \cdot 10^{24} \frac{Kg}{s}$$

( Παρατηρήστε ότι:  $\frac{\frac{J}{s}}{m^2} = \frac{N \frac{m}{s}}{m^2} = \frac{Kg \frac{m^2}{s^3}}{m^2} = \frac{Kg}{s}$  ).

Τώρα παίρνοντας ότι ένα έτος ισοδυναμεί με  $3,15 \cdot 10^7$  s, έχουμε ότι σε ένα έτος η μαύρη τρύπα καταναλώνει ποσότητα μάζας ίση προς:

$$M = 1,11 \cdot 10^{24} \frac{Kg}{s} \cdot 3,15 \cdot 10^7 \frac{s}{y} = 3,50 \cdot 10^{31} Kg$$

Με δεδομένο ότι η μάζα του Ήλιου είναι:

$$M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} Kg ,$$

Η μαύρη τρύπα καταβροχθίζει:

$$k = \frac{M}{M_{\odot}} = \frac{3,50 \cdot 10^{31} Kg}{1,99 \cdot 10^{30} Kg} = 17,6$$

Δηλαδή 17,6 ηλιακές μάζες ανά έτος!

## ΑΣΚΗΣΗ 2

Μετατοπίσεις Doppler έχουν δείξει ότι ιονισμένο αέριο στον πυρήνα του Γαλαξία M87 περιστρέφεται με ταχύτητα 800 Km/s, σε μια ακτίνα 60 ετών φωτός. Υπολογίστε τη μάζα μέσα σε ακτίνα 60 ετών φωτός από το γαλαξιακό κέντρο.

### ΛΥΣΗ

Έστω ότι εντός της σφαίρας με ακτίνα  $R=60ly$ , έχουμε σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας, έτσι ώστε το ιονισμένο αέριο να δέχεται βαρυτική δύναμη, ωσάν όλη η μάζα να ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο σφαίρας, όπως προβλέπει για την περίπτωση αυτή η θεωρία βαρύτητας του Νεύτωνα.

Ας υποθέσουμε επίσης ότι το ιονισμένο αέριο έχει μάζα  $m$ . (Παρακάτω θα δούμε ότι η μάζα απλοποιείται). Επίσης ας θεωρήσουμε ότι εντός της σφαίρας υπάρχει μάζα  $M$ , ωσάν να είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο. Στο μοντέλο λοιπόν αυτό η (Νευτώνεια) δύναμη βαρύτητας πάνω στη μάζα  $m$ , «παίζει» το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης που αναγκάζει τη μάζα  $m$  να περιστρέφεται. Η χρήση μη-σχετικιστικής μηχανικής δικαιολογείται από το γεγονός ότι:  $v \ll c$

Έχουμε λοιπόν:

$$F_N = F_k \Rightarrow G \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow$$
$$M = \frac{v^2 R}{G} \quad (1)$$

Στη σχέση λοιπόν (1) έχουμε:

$$v = 800 \frac{Km}{s} = 8 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$$

Και:

$$R = 60ly = 60 \cdot 9,46 \cdot 10^{15} m = 5,68 \cdot 10^{17} m$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2 Kg^{-2}$$

Οπότε:

$$M = \frac{(8 \cdot 10^5 \frac{m}{s})^2 5,68 \cdot 10^{17} m}{6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2 Kg^{-2}},$$

ή

$$M \approx 5,45 \cdot 10^{39} \text{ Kg}$$

(Παρατηρήστε ότι:  $\frac{\frac{m^2}{s^2} m}{Nm^2 Kg^{-2}} = \frac{\frac{m^3}{s^2}}{Kg \frac{m}{s^2} \frac{m^2}{Kg^2}} = Kg$ ).

Με δεδομένη τη μάζα του Ήλιου:

$$M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ Kg},$$

Η μάζα  $M$  που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα των 60 ετών φωτός, ισοδυναμεί με:

$$\frac{5,45 \cdot 10^{39} \text{ Kg}}{1,99 \cdot 10^{30} \text{ Kg}} \approx 2,7 \cdot 10^9 \text{ ηλιακές μάζες.}$$

Πρόκειται δηλαδή για μια τεράστια ποσότητα μάζας (συγκεντρωμένης στη σχετικά μικρή αυτή περιοχή) που παραπέμπει (ενδεχομένως) στην ύπαρξη μιας μαύρης τρύπας στον πυρήνα του Γαλαξία M87.

## ΑΣΚΗΣΗ 3

Ο Betelgeuse είναι ένας από του γνωστούς κόκκινους γίγαντες και ανήκει στον αστερισμό του Ωρίωνα. Έχει φωτεινότητα  $1,4 \cdot 10^{31} \text{ W}$  και επιφανειακή θερμοκρασία  $3400 \text{ K}$ . Πόση είναι η ακτίνα του;

## ΛΥΣΗ

Υποθέτοντας ότι οι αστέρες ακτινοβολούν ως μέλανα σώματα, η φωτεινότητα, η θερμοκρασία επιφανείας και η ακτίνα θα συνδέονται μέσω του νόμου των Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Έχουμε λοιπόν:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

ή

$$R^2 = \frac{L}{4\pi\sigma T^4}$$

ή

$$R = \frac{1}{2T^2} \sqrt{\frac{L}{\pi\sigma}}$$

ή

$$R = \frac{1}{2(3400K)^2} \sqrt{\frac{1,4 \cdot 10^{31} W}{3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}}}$$

ή

$$R = \frac{1}{2 \cdot 11,56 \cdot 10^6 K^2} \cdot 8,18 \cdot 10^{18} mK^2$$

ή

$$R = 3,54 \cdot 10^{11} m$$

Η ακτίνα του Ήλιου είναι:

$$R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 m$$

Οπότε η ακτίνα του Betelgeuse, είναι:

$$R = \frac{3,54 \cdot 10^{11}}{6,96 \cdot 10^8} R_{\odot},$$

Δηλαδή:

$$R \approx 500R_{\odot}$$

$$\left( \frac{3,54 \cdot 10^{11}}{6,96 \cdot 10^8} = 508,62 \right)$$

Έχοντας λοιπόν επιφανειακή θερμοκρασία  $T=3400K$  και ακτίνα  $R \approx 500R_{\odot}$ , ο Betelgeuse (α-Orionis) δίκαια ανήκει στους κόκκινους γίγαντες.

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

[johnfior58@gmail.com](mailto:johnfior58@gmail.com)