ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Σε όλες τις κινήσεις που μελετούσαμε μέχρι τώρα , προκειμένου να απλοποιηθεί η μελέτη τους, θεωρούσαμε τα σώματα ως **υλικά σημεία**.

Το υλικό σημείο ορίζεται ως σώμα που έχει όλες τις άλλες ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις.

Ένα υλικό σημείο, μη έχοντας διαστάσεις, έχει τη δυνατότητα να **εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις.**

Στην πραγματικότητα όμως υλικά σημεία δεν υπάρχουν , αφού όλα τα σώματα όσο μικρά και αν είναι, έχουν διαστάσεις

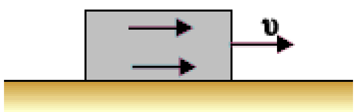
Αν σε κάποιο στερεό σώμα ασκηθούν δυνάμεις το σώμα παραμορφώνεται, λίγο ή πολύ και μόνιμα ή προσωρινά.

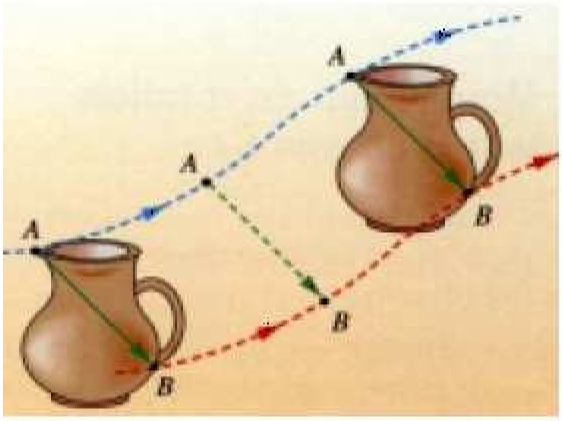
Τα υποθετικά στερεά **που δεν παραμορφώνονται** όταν τους ασκούνται δυνάμεις λέγονται **μηχανικά στερεά**.

Ένα στερεό σώμα μπορεί να κάνει

μεταφορική, στροφική και σύνθετη κίνηση.

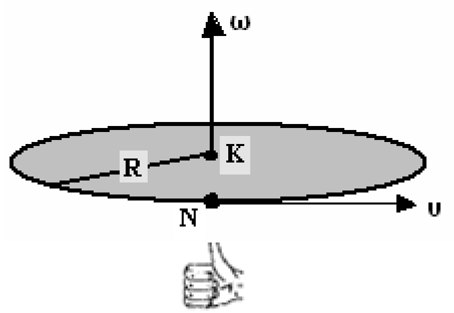
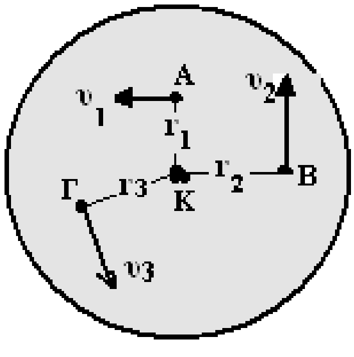
ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

 Το κιβώτιο εκτελεί μεταφορική κίνηση. Όλα του τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα.	**Στη μεταφορική κίνηση κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα**.

 Η τροχιά κάθε σημείου είναι καμπύλη. Η κίνηση του σώματος είναι μεταφορική αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ παραμένει διαρκώς παράλληλο προς τον εαυτό του.	**Μεταφορική μπορεί να είναι και μια καμπυλόγραμμη κίνηση.** Όταν ένα στερεό κάνει μεταφορική κίνηση**, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του.**

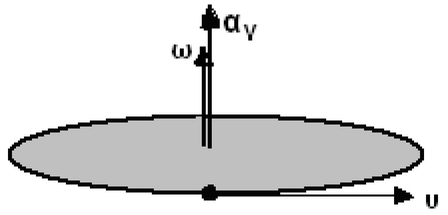
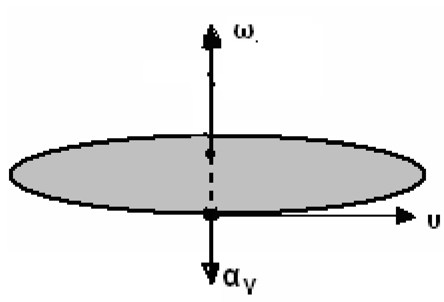
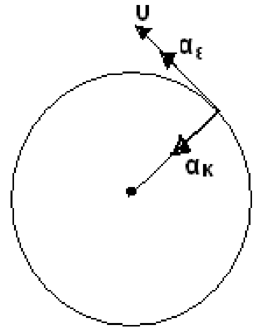
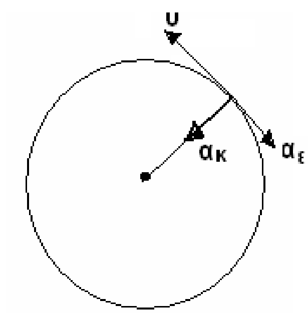
<u>ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ</u>

Στη στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει προσανατολισμό. Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία -**ο άξονας περιστροφής** - που όλα της τα σημεία παραμένουν ακίνητα ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνησηΑν σε μια κυκλική κίνηση μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα ω , θα λέμε ότι έχουμε

	¨Εστω δίσκος ακτίνας R περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γυρω από άξονα Κ που περνά από το κέντρο του Η γωνιακή ταχύτητα ω του δίσκου είναι **($\omega = d\theta/dt$)** Για το σημείο **Ν** της περιφέρειας του δίσκου Η γραμμική ταχύτητα περιστροφής θα είναι **$\upsilon = \omega .R$**
	Για τα σημεία **Α, Β ,Γ** θα είναι αντίστοιχα **$\upsilon_1 = \omega .r_1$ $\upsilon_2 = \omega .r_2$ $\upsilon_3 = \omega .r_3$** Σε μια ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό η κατεύθυνση της όμως μεταβάλλεται συνεχώς άρα έχουμε επιτάχυνση . Η επιτάχυνση αυτή ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση α_κ** Η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει μέτρο **$\alpha_\kappa = \upsilon^2/R = \omega^2 .R$** και φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς

γωνιακή επιτάχυνση α_γ $\alpha_\gamma = d\omega/dt$ **(Μονάδα μέτρησης στο S.I είναι το 1 rad/s²**

(αν το μέτρο της ω αυξάνεται τα διανύσματα ω και α_γ έχουν την ίδια φορά , ενώ αν το μέτρο της ω ελαττώνεται έχουν αντίθετη φορά)

	**$\omega = \omega_o + \alpha_\gamma t$ και $\Delta\theta = \omega_o . t + \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2$** αν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω αυξάνει
	**$\omega = \omega_o - \alpha_\gamma t$ και $\Delta\theta = \omega_o . t - \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2$** αν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω ελαττώνεται Όπου ω_o η αρχική γωνιακή ταχύτητα **Στις παραπάνω σχέσεις το α_γ είναι το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης ή επιβράδυνσης (δηλαδή η απόλυτη τιμή του α_γ)**
 	Αν σε μια κυκλική κίνηση μεταβάλλεται το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω , θα μεταβάλλεται και το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας.Επομένως εκτός από την κεντρομόλο επιτάχυνση , θα έχουμε και μια επιτάχυνση η οποία θα μας δείχνει τον ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτηταςΗ επιτάχυνση αυτή ονομάζεται **επιτρόχιος επιτάχυνση και το μέτρο της δίνεται από την σχέση $\alpha_\varepsilon = d\upsilon/dt$. Η επιτρόχιος επιτάχυνση έχει διεύθυνση εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά και φορά την φορά της ταχύτητας υ, αν το μέτρο της υ αυξάνεται, ή αντίθετη αν το μέτρο της υ ελαττώνεται.** Ισχύει $\alpha_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega . R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} . R = \alpha_\gamma . R$

<u>Παρατηρήσεις</u>

<u>Α. Αν κάποιο σώμα εκτελεί στροφική κίνηση τότε</u>

Όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα (ω) , την ίδια περίοδο (T) , την ίδια συχνότητα (f) και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση ($α_γ$)Για τις γραμμικές ταχύτητες περιστροφής τις κεντρομόλες επιταχύνσεις και τις επιτρόχιες επιταχύνσεις ισχύει

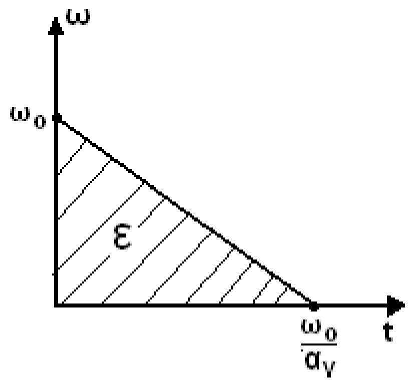
$$\frac{\upsilon_A}{\upsilon_B}=\frac{\omega.R_A}{\omega.R_B}=\frac{R_A}{R_B}\ ,\qquad \frac{a_{KA}}{a_{KB}}=\frac{\omega^2.R_A}{\omega^2.R_B}=\frac{R_A}{R_B}\ ,\qquad \frac{a\varepsilon_A}{a\varepsilon_B}=\frac{\alpha_\gamma.R_A}{\alpha_\gamma.R_B}=\frac{R_A}{R_B}$$

Β. Αν δίσκος που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $ω_ο$, αρχίσει να επιβραδύνεται με σταθερή γωνιακή επιβράνδυση $α_γ$, τότε ισχύει η σχέση

$ω = ω_ο - α_γ t$

Αν στη παραπάνω σχέση θέσουμε ω=ο βρίσκουμε μετά από πόσο χρόνο ο δίσκος θα σταματήσει

$ω_ο - α_γ t=ο \Leftrightarrow t = ω_ο/α_γ$



Η γραφική παράσταση του ω με τον χρόνο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα Το γραμοσκιασμένο εμβαδό μας δίνει την γωνία που θα διαγράψει μια ακτίνα του δίσκου μέχρι να σταματήσει

Θα είναι **$Δθ= ω_ο^2/2α_γ$** ενώ το πηλίκο N=**Δθ/2π** μας δίνει το πλήθος των περιστροφών που θα κάνει ο δίσκος

<u>ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ</u>

Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του λέμε ότι κάνει σύνθετη κίνηση.

Το κέντρο μάζας.

Μια έννοια που απλοποιεί τη μελέτη του στερεού σώματος είναι η έννοια του **κέντρου μάζας** του σώματος.

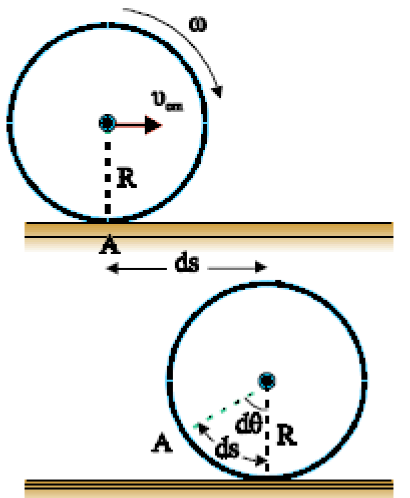
Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο του σώματος που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

(Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους)

Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα. (Τέτοια είναι η περίπτωση ισοπαχούς ομογενούς δακτυλίου)

<u>Η κύλιση του τροχού</u>

Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα τροχό που κυλίεται .



Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετακινηθεί κατά *ds*, κάθε σημείο στην περιφέρεια του στρέφεται κατά το ίδιο τόξο.

Έστω υ_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού κάποια χρονική στιγμή.

Αν σε χρόνο **dt** ο τροχός μετακινηθεί κατά **ds**

θα είναι $\upsilon_{cm} = \dfrac{ds}{dt}$

Στο ίδιο χρόνο όμως και κάθε σημείο της περιφέρειας του θα έχει στραφεί κατά τόξο ίσου μήκους με το **ds**

στο τόξο αυτό αντιστοιχεί επίκεντρη γωνία $d\vartheta = ds/R \Leftrightarrow ds = d\vartheta . R$

(όπουR η ακτίνα του τροχού)

Επομένως η σχέση $\upsilon_{cm} = \dfrac{ds}{dt}$ γράφεται

$$\upsilon_{cm} = \frac{d\theta}{dt} . R \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \omega . R$$

Αν ο τροχός επιταχύνεται θα ισχύει

$\alpha_{cm} = \dfrac{d\upsilon_{cm}}{dt}$ *και αφού* $\upsilon_{cm} = \omega . R$

Θα είναι $\alpha_{cm} = \dfrac{d(\omega . R)}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt} . R = \alpha_\gamma . R$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

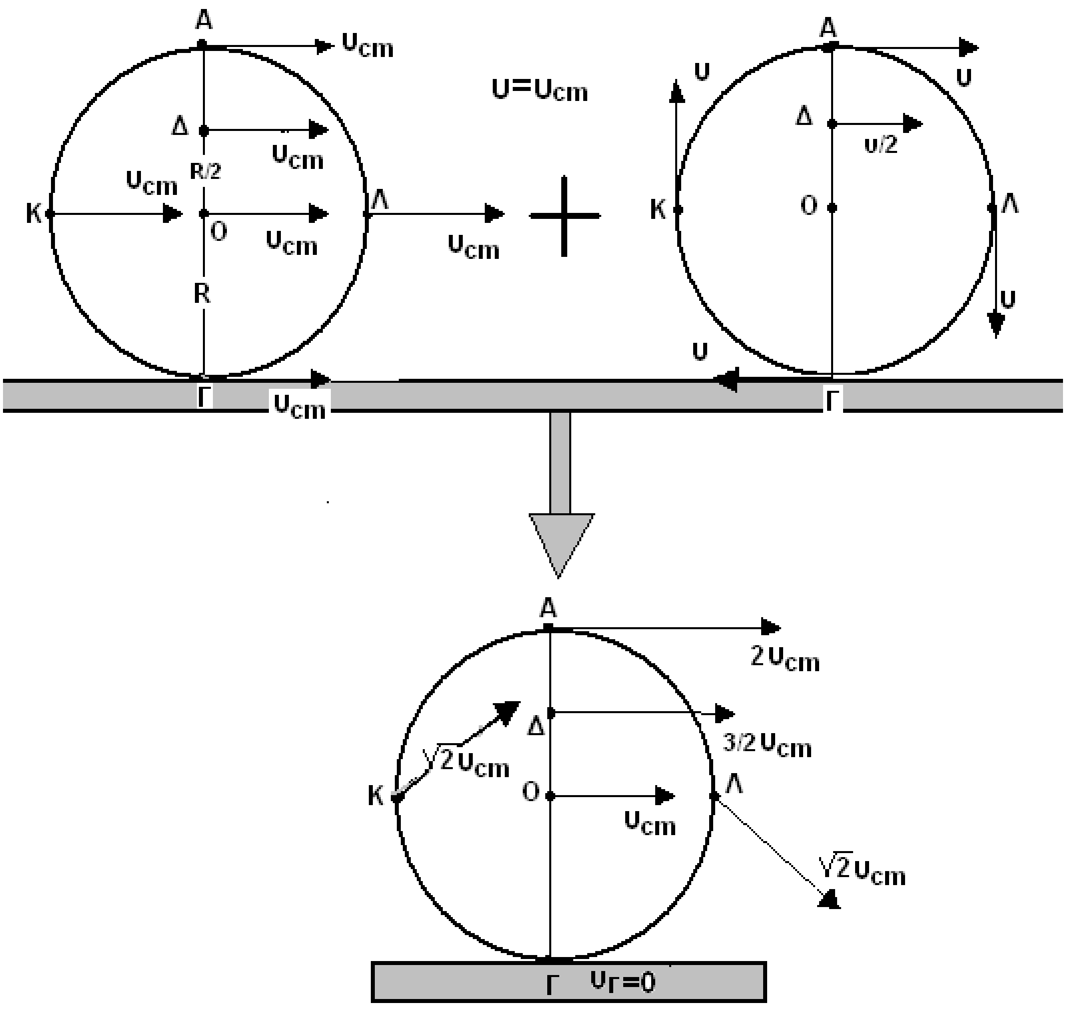
Η **ταχύτητα του κέντρου μάζας** ενός τροχού που κυλίεται, **έχει το ίδιο μέτρο με την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού**, λόγω της στροφικής κίνησης

Αν ο τροχός επιταχύνεται **Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι ίση κατά μέτρο με την επιτρόχιο επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του τροχού**

Η κύλιση του τροχού είναι επαλληλία μιας μεταφορικής κίνησης και μιας στροφικής κίνησης .

Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας που έχει λόγω μεταφορικής κίνησης (**υ_{cm}**)και της ταχύτητας λόγω περιστροφής (**υ**).

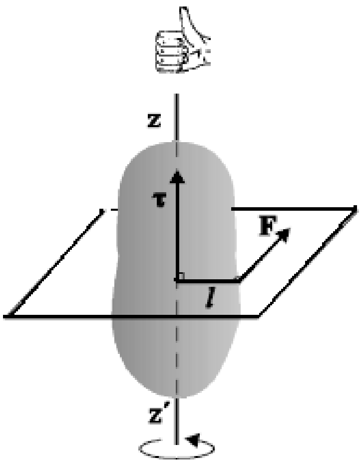
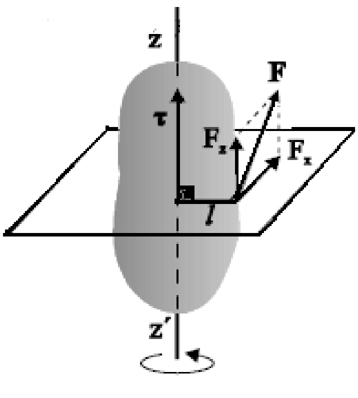
Είναι όμως **$\upsilon=\omega.R$** και όπως δείξαμε είναι **$\upsilon_{cm} = \omega.\ R$** άρα τα μέτρα των υ και υ_{cm} είναι ίσα ($\upsilon=\upsilon_{cm}$)



ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Το μέγεθος το οποίο περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα ονομάζεται **ροπή της δύναμης** και συμβολίζεται με το ελληνικό **τ**.

Α) Ροπή δύναμης ως προς άξονα

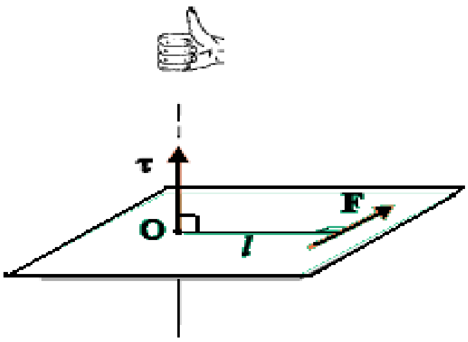
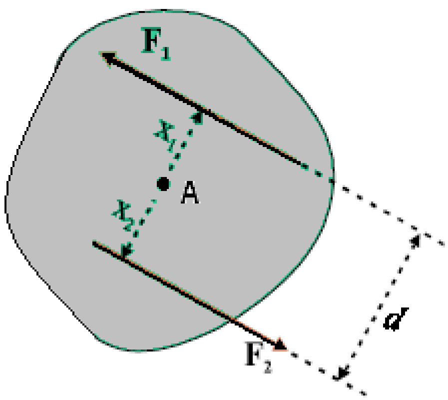
	**Ροπή της δύναμης F, ως προς τον άξονα περιστροφής ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση *l* της δύναμης απότον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας).** τ = F.l **Η ροπή έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.** **Μονάδα ροπής είναι το 1 N m**.
	Αν η δύναμη **F** δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, η ροπή της είναι ίση με τη ροπή που δημιουργεί η συνιστώσα της που βρίσκεται πάνω στο κάθετο επίπεδο Η ροπή της δύναμης **F** έχει μέτρο τ=*Fx l*

Β) Ροπή δύναμης ως προς σημείο

- Αν σ' ένα ελεύθερο σώμα ασκηθεί δύναμη **που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του**, το σώμα δεν περιστρέφεται (θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση).

- Αν όμως ο **φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του**, το σώμα μαζί με τη μεταφορική κίνηση θα εκτελέσει και περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα **(ελεύθερος άξονας)** που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το κέντρο μάζας του σώματος.

Στις περιπτώσεις που **δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής** χρησιμοποιείται η έννοια της ροπής της δύναμης ως προς σημείο.

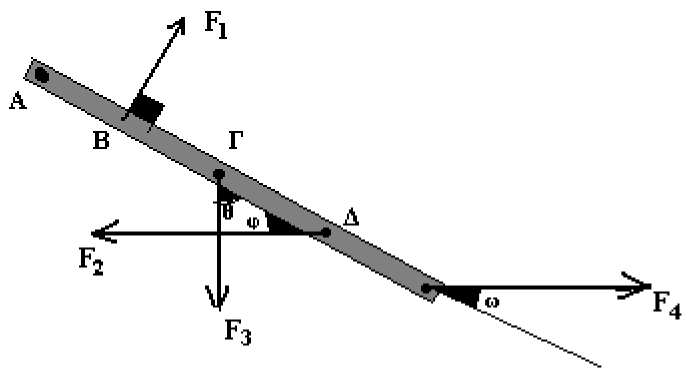
	<u>**Ροπή δύναμης F ως προς σημείο**</u> **Ο** ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση της από το σημείο Ο $\boldsymbol{\tau = F \cdot l}$ διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το σημείο Ο και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
	Αν σε ένα σώμα δρουν δύο αντίρροπες δυνάμεις **F1** και **F2** με ίσα μέτρα. Δυο τέτοιες δυνάμεις αποτελούν **ζεύγος δυνάμεων**. Αν η απόσταση των φορέων των δυο δυνάμεων είναι *d*, *η* αλγεβρική τιμή της ροπής του ζεύγους ως προς κάποιο σημείο Α που απέχει απόσταση x_1 από τη δύναμη $\mathbf{F_1}$ και x_2 από την $\mathbf{F_2}$, είναι $\boldsymbol{\tau = F_1 . x_1 + F_2 . x_2 = F_1 .(x_1 + x_2) = F_1 . d}$ Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο

Γενικά για τον υπολογισμό της Ροπής Δύναμης ,που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής θα χρησιμοποιούμε την σχέση $\boldsymbol{\tau_F = F.d.ημθ}$

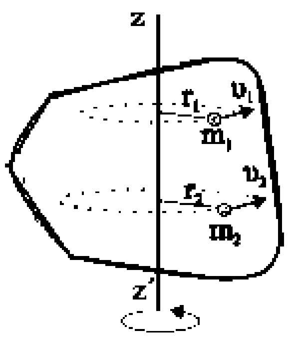
Έτσι για το παρακάτω σχήμα **τα μέτρα** των ροπών των δυνάμεων , ως προς άξονα που είναι κάθετος στη δοκό και περνά από το Α είναι

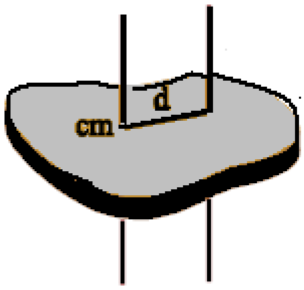
$\boldsymbol{\tau_{F1} = F_1.(AB)}$ $\boldsymbol{\tau_{F2} = F_2.(AΔ).ημφ}$ $\boldsymbol{\tau_{F3} = F_3.(AΓ).ημθ}$ **και**

$\boldsymbol{\tau_{F4} = F_4.L.ημω}$ **(L το μήκος της δοκού)**



ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Έστω ένα στερεό το οποίο στρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα zz΄  $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots$	**Ονομάζουμε ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα** zz΄**το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής**. Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει μονάδα το 1 kg m^2. **Εξαρτάται από την θέση του άξονα περιστροφής και από τον τρόπο που κατανέμεται η μάζα γύρω από τον άξονα πριστροφής**



Μεταξύ της ροπής αδράνειας I_{cm} ενός σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και της ροπής αδράνειας I ως προς οποιοδήποτε άλλο άξονα , παράλληλο με τον πρώτο σε απόσταση d από αυτόν, υπάρχει μια απλή σχέση, γνωστή ως το θεώρημα παραλλήλων αξόνων ή

θεώρημα Steiner (Στάινερ).

$$I= I_{cm}+ Md^2$$

Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας ενός σώματος συνήθως δεν είναι εύκολος.

εμείς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ροπή **αδράνειας ομογενούς δακτυλίου** μάζας M και ακτίνας R, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του. (Θεωρούμε ότι το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του)

Υπολογισμός :Θεωρούμε ότι ο δακτύλιος αποτελείται από τις στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2 …. Είναι φανερό ότι $m_1 + m_2 + ……=M$ Επειδή το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του R, όλες οι στοιχειώδεις μάζες έχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής. Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας

$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots)R^2= MR^2$ Άρα

$$I = MR^2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Αν έχουμε μεμονωμένες σημειακές μάζες τότε για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας χρησιμοποιώ την σχέση $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$

Αν έχουμε σύστημα σωμάτων, που συμπεριφέροντε σαν ένα στερεό, τότε για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ως προς άξονα Α χρησιμοποιούμε την σχέση $I_{(A)} = I_{1(A)}+I_{2(A)}+\ldots.$

Όπου $I_{1(A)}$, $I_{2(A)}$,… οι ροπές αδράνειας κάθε σώματος χωριστά ως προς (Α)

Αν στο σύστημα των σωμάτων έχουν στερεωθεί και στοιχειώδεις μάζες , τότε $I_{(A)} = I_{1(A)}+I_{2(A)}+\ldots.\ m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$

<u>ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ</u>

Όπως στην περίπτωση ενός υλικού σημείου, ισχύει η σχέση Σ**F** = *m***α** Ένας αντίστοιχος θεμελιώδης νόμος ισχύει και στη στροφική κίνηση των στερεών σωμάτων. Σύμφωνα με αυτόν, για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ροπή. Η σχέση ανάμεσα στην αιτία (ροπή) και το αποτέλεσμα (μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας) είναι

$$\Sigma\tau = I.\alpha_\gamma$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως **ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης**, δηλαδή, **το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας (υπολογισμένης ως προς τον άξονα περιστροφής) και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.**

Από τη σχέση $\Sigma\tau = I.\alpha_\gamma$ φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος τόσο πιο δύσκολα αλλάζει η περιστροφική κατάσταση του σώματος.

Δηλαδή

- Όπως η μάζα είναι το μέτρο της αδράνειας στη μεταφορική κίνηση έτσι και **η ροπή αδράνειας** εκφράζει **την αδράνεια του σώματος στη στροφική κίνηση**,

- Ενώ όμως η μάζα ενός σώματος είναι σταθερό μέγεθος η ροπή αδράνειας εξαρτάται κάθε φορά από τη θέση του άξονα περιστροφής.

<u>**Αν Στ=0,**</u> από τη σχέση $\Sigma\tau = I.\alpha_\gamma$ προκύπτει ότι και η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν,

δηλαδή αν το σώμα είναι ακίνητο θα εξακολουθήσει να ηρεμεί, ενώ αν στρέφεται θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Οι στροφικές κινήσεις που μελετήσαμε μέχρι τώρα αναφέρονται σε σταθερό άξονα περιστροφής.

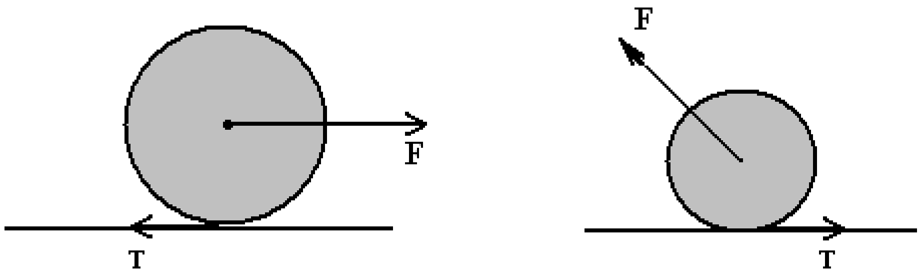
Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει και στις περιπτώσεις που ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται

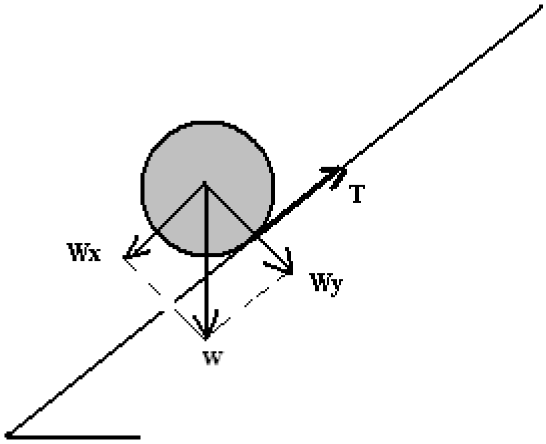
(πχ σύνθετης κίνησης, κύλιση τροχού), αρκεί ο άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το σώμα να διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, να

είναι άξονας συμμετρίας και να μην αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης.

<u>Πως σχεδιάζουμε την δύναμη Στατικής τριβής σε τροχό</u>

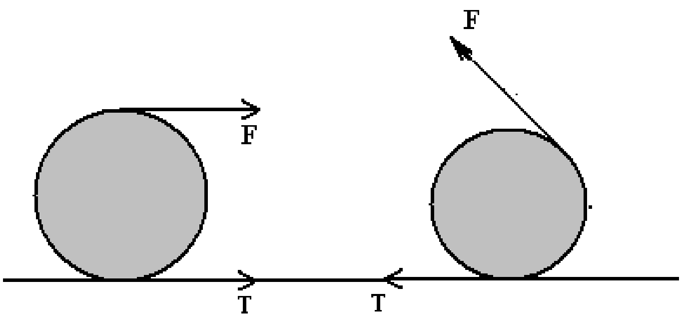
<u>Αν οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό περνούν από το κέντρο μάζας του τροχού Τότε η δύναμη τριβης σχεδιάζεται έτσι ώστε να έχει φορά αντίθετη από την ΣFx</u>





<u>Στο κεκλιμένο επίπεδο η δύναμης τριβής θα είναι προς τα πάνω είτε ο τροχός ανεβαίνει είτε κατεβαίνει Αν πάνω του ενεργεί μόνο το βάρος του</u>

<u>Αν οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό δεν περνούν από το κέντρο μάζας του τροχού Τότε η δύναμη τριβης σχεδιάζεται έτσι ώστε να κάνει αντίθετη ροπή ως προς το κέντο μάζας από ότι οι εξωτερικές δυνάμεις</u>

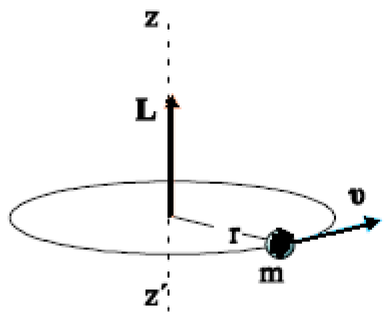


ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Όπως η ορμή είναι ένα μέγεθος που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή της μεταφορικής κίνησης των στερεών.

Η **στροφορμή** χρησιμοποιείται αντίστοιχα για την περιγραφή της στροφικής κίνησης

Α) Στροφορμή υλικού σημείου



Έστω ένα υλικό σημείο μάζας *m* και ορμής **p** που κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας *r* **Ονομάζουμε στροφορμή του υλικού σημείου ως προς ένα άξονα z΄z που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο** $L = p\,r$ **ή** $L = m\,\upsilon\,r$ **, διεύθυνση αυτή του άξονας z΄z και φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα στροφορμής είναι το 1 kg m² /s.**

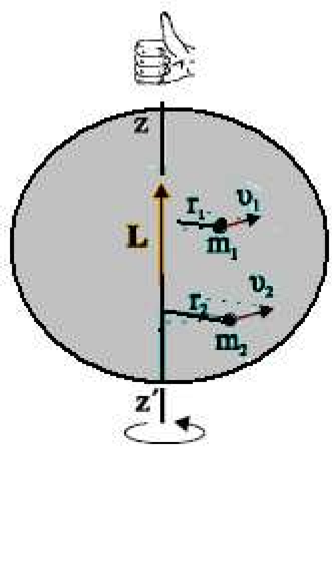
Β) Στροφορμή στερεού σώματος

Έστω στερεό που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα z΄z με γωνιακή ταχύτητα ω. Κατά την περιστροφή του σώματος τα διάφορα σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές τα επίπεδα των οποίων είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Όλα τα σημεία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, ενώ η γραμμική τους ταχύτητά είναι διαφορετική

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σώμα αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα, με μάζες m_1, m_2 .... , τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι στροφορμές των στοιχειωδών αυτών μαζών έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση και μέτρα, $L_1 = m_1\upsilon_1\, r_1$, $L_2 = m_2\upsilon_2\, r_2$ *κ.λ.π*

Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν.

$$L = m_1\upsilon_1\, r_1 + m_2\upsilon_2\, r_2 + \ldots.$$



Επειδή τα υλικά σημεία m_1, m_2 ... κάνουν κυκλική κίνηση οι ταχύτητές τους υ_1, υ_2 ... μπορούν να γραφούν $\upsilon_1 = \omega\, r_1$, $\upsilon_2 = \omega\, r_2$ κ. ο. κ. οπότε η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί

$L = m_1\omega r_1^2 + m_2\omega r_2^2 + \ldots = (m r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots).\omega = I.\omega$

Άρα η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα ισούται με $L = I\omega$ έχει τη διεύθυνση του άξονα και η φορά της ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Τη στροφορμή που έχει ένα σώμα που περιστρέφεται γύρω από άξονά που περνάει από το κέντρο μάζας του συχνά την ονομάζουμε **σπιν,** για να τη διακρίνουμε από τη στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα λόγω άλλης κίνησης. **Για παράδειγμα, η Γη** έχει σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της και στροφορμή εξαιτίας της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο, **Τα στοιχειώδη σωματίδια - ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια - έχουν σπιν μέτρου $0{,}53.10^{-34}$ Js.** Αυτή η στροφορμή σπιν συνήθως εκφράζεται ως

$\frac{1}{2}\hbar$, όπου $\hbar = 1{,}05\times10^{-34}$ J s

(προφέρεται έιτς μπάρ) και είναι μια θεμελιώδης ποσότητα στροφορμής που εμφανίζεται συχνά στη κβαντική φυσική.

Γ) Στροφορμή συστήματος

Σε ένα σύστημα σωμάτων, **στροφορμή ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα**. Εάν δηλαδή οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος είναι **L1**, **L2**, .., η στροφορμή **L** του συστήματος είναι **L**=**L1**+**L2**+...

<u>ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ</u>

Από την σχέση **$L = I\omega$ προκύπτει ότι για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα** dt η στροφορμή ενός στερεού του θα μεταβληθεί κατά $dL = I\,d\omega$

Συνεπώς $\frac{dL}{dt} = I.\frac{d\omega}{dt} = I.\alpha_\gamma$ *Επομένως θα είναι* $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$

Επομένως **το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του**

Η σχέση αυτή είναι για τη στροφική κίνηση το ανάλογο του **δεύτερου νόμου του Newton**.

Ο νόμος αυτός ισχύει και σε σύστημα σωμάτων.

Σε ένα σύστημα σωμάτων, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα , είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν. Αφού σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη (δράση - αντίδραση).

Σε κάθε τέτοιο ζεύγος οι δυνάμεις είναι αντίθετες ,άρα η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν Επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.

Έτσι η σχέση για σύστημα σωμάτων γράφεται

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$$

Όπου $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}$ το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εξωτερικών δυνάμεων

<u>ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ</u>

Όπως στη μεταφορική κίνηση ισχύει ο νόμος διατήρησης της ορμής .Έτσι και στη στροφική κίνηση ισχύει ένας ανάλογος νόμος διατήρησης, Το μέγεθος που διατηρείται στη στροφική κίνηση είναι η στροφορμή.

- **Η διατήρηση της στροφορμής σε ένα σώμα**

Αν σε ένα σώμα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, τότε από τη σχέση $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$ προκύπτει ότι $\frac{dL}{dt}$ = ο επομένως,

L =σταθερό **Δηλαδή η στροφορμή του σώματος παραμένει σταθερή.**

★ <u>Παράδειγμα</u>

Κατά την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της (ιδιοπεριστροφή), επειδή η ελκτική δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο δε δημιουργεί ροπή, αφού ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας της, **η στροφορμή της Γης παραμένει σταθερή**. Επομένως η χρονική διάρκεια περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της παραμένει **σταθερή –24 ώρες. (Το ίδιο συμβαίνει και για το spin του ηλεκτρονίου καθότι οι δυναμεις Coulomb που δέχεται από τον πυρήμα δεν κάνουν εξωτερική ροπή)**

- **Η διατήρηση της στροφορμής σε σύστημα σωμάτων.**

Για σύστημα σωμάτων ο δεύτερος νόμος του Newton γράφεται

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα είναι μηδέν η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως

Αρχή της διατήρησης της στροφορμής

Αν, λόγω ανακατανομής της μάζας (εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων), μεταβληθεί η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητά του αλλά η στροφορμή του διατηρείται σταθερή.

Παραδείγματα φαινομένων στα οποία διατηρείται η στροφορμή

- **Η αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ**, που στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο. μπορεί, συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της, να αυξήσει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. **Εάν η τριβή** των παγοπέδιλων με τον πάγο θεωρηθεί **αμελητέα**, **οι εξωτερικές δυνάμεις - όπως το βάρος και η δύναμη που δέχεται από το έδαφος - δε δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της**, επομένως η στροφορμή της διατηρείται, δηλαδή το γινόμενο **Ι.ω** παραμένει σταθερό. Συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της η ροπή αδράνειας μειώνεται, άρα , αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.

- **Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα** συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. Κατά την κίνηση του ακροβάτη στον αέρα, μοναδική εξωτερική δύναμη είναι το βάρος του, το οποίο, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας, δε δημιουργεί ροπή και η στροφορμή του διατηρείται. Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας, επομένως αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

- **Τα αστέρια τα οποία στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους** έχουν μάζα από 1,4 έως 2,5 φορές τη μάζα του Ήλιου, μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων ή pulsars. Τα αστέρια αυτά, όταν εξαντλήσουν τις πηγές ενέργειας που διαθέτουν, συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας μέχρις ότου η πυρήνες των ατόμων τους αρχίσουν να εφάπτονται, με αποτέλεσμα η ακτίνα ενός τέτοιου αστεριού να είναι μόνο 15-20 km. Επειδή η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις η στροφορμή διατηρείται σταθερή και **επειδή η ροπή αδράνειας** του αστεριού

μειώνεται δραματικά έχουμε μια αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας περιστροφής. Υπολογίζεται ότι ένας αστέρας νετρονίων περιστρέφεται με συχνότητα 3000 στροφές το δευτερόλεπτο.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΛΟΓΩ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Κάθε σώμα που στρέφεται γύρω άξονα έχει κινητική ενέργεια.

Για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σώμα αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα, με μάζες m_1, m_2 .... , τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι μάζες αυτές έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμικές ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις $\upsilon_1 = \omega . r_1$, $\upsilon_2 = \omega . r_2$ *κ.λ.π*

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται, δηλαδή ...

$K = ½\, m_1\upsilon_1^2 + ½\, m_2\upsilon_2^2 + ...$ **[Και αφού $\upsilon_1 = \omega . r_1$, $\upsilon_2 = \omega . r_2$,..]**

$= ½\, m_1 . \omega^2 . r_1^2 + ½\, m_2\, \omega^2 . r_2^2 + ...$

$= ½\, (m_1 . r_1^2 + m_2 . r_2^2 + ...)\, \omega^2$

$= ½\, I . \omega^2$

Προσοχή η ενέργεια αυτή δεν είναι μια νέα μορφή ενέργειας.

Η σχέση στην οποία καταλήξαμε αποτελεί απλά μια βολική έκφραση για την κινητική ενέργεια ενός σώματος που στρέφεται.

Αν το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση,

η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης.

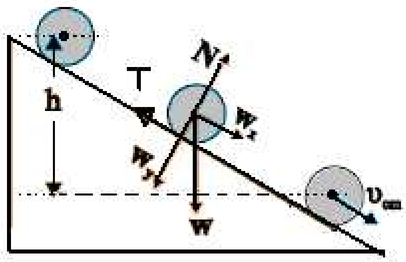
$K = ½\, I . \omega^2 + ½\, M .\, \upsilon_{cm}^2$

όπου M η μάζα του σώματος και υ_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του.

<u>Παρατήρηση</u>

Η κύλιση ενός σώματος (κυλίνδρου ,.τροχού ,σφαίρας ,...) οφείλεται στην τριβή.

Η ροπή της τριβής ως προς τον άξονα συμμετρίας του σώματος είναι αυτή που περιστρέφει το σώμα.



$$Mgh=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

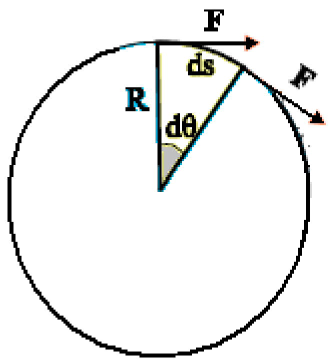
Η τριβή στο σημείο επαφής , κατά την κύλιση , είναι στατική τριβή

(αφού η ταχύτητα αυτού του σημείου είναι μηδέν)

Και αφού η στατική τριβή δεν κάνει έργο η μηχανική ενέργεια του σώματος που κυλίεται σε κεκλιμένο επίπεδο όπως στο διπλανό σχήμα παραμένει σταθερή

ΕΡΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Το έργο μιας δύναμης που στρέφει ένα σώμα μπορούμε να το εκφράσουμε σε συνάρτηση με τη ροπή της.



Έστω ότι η δύναμη **F** ασκείται στην περιφέρεια ενός τροχού ακτίνας *R*, κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης.

Κατά την πολύ μικρή στροφή τουτροχού κατά γωνία $d\theta$ η δύναμη παράγει έργο

dW =F ds είναι όμως ***ds =R d*θ** (όπου $d\theta$ σε ακτίνια)

Άρα dW=F. R. dθ ⇔ *dW =τ.dϑ αφού (τ= FR)*

Για να υπολογίσουμε το έργο μιας δύναμης καθώς ένα σώμα στρέφεται κατά γωνία ϑ χωρίζουμε τη γωνία σε πολύ μικρές γωνίες $d\theta_1$, $d\theta_2$,... και αθροίζουμε τα αντίστοιχα έργα.Αν η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, από το άθροισμα προκύπτει

$W=\tau.(d\theta_1+d\theta_2+\ldots) = \tau.\ \theta$

Ισχύς *P*

Από την σχέση $dW=\tau.d\vartheta$ παίρνουμε $dW/dt = \tau.\ d\vartheta/dt$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου dW/dt είναι **η ισχύ της δύναμης** και το $d\theta/dt$ είναι η γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος, επομένως ***P* = τ.ω**

Θεώρημα έργου - ενέργειας

Στη στροφική κίνηση, το θεώρημα έργου - ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$\sum W = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

δηλαδή **το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.**