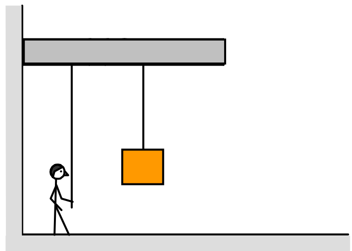
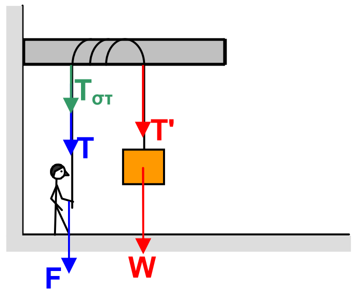
ΜΙΑ ΧΡΗΣΙΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ



Ένα μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας και διατομής τυλίγεται γύρω από δοκό κυκλικής διατομής ακτίνας R. Στο ένα άκρο του κατακόρυφου τμήματος του νήματος έχει συνδεθεί σώμα βάρους W.Στο άλλο άκρο ασκείται δύναμη μέτρου F από έναν άνθρωπο που το κρατάει. Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ νήματος και δοκού είναι μ_s.

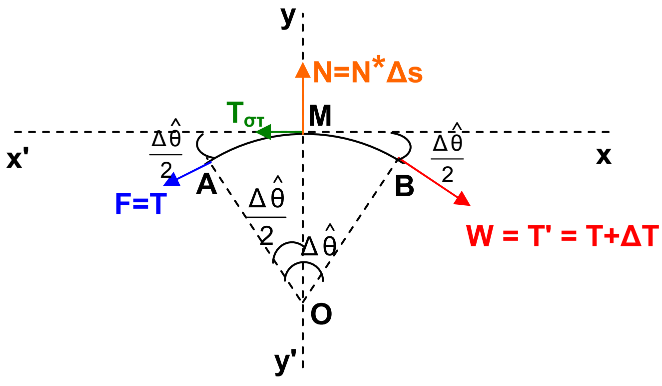
Αν το τμήμα του νήματος που είναι τυλιγμένο στη δοκό μόλις δεν ολισθαίνει πάνω στη δοκό,να βρεθεί η σχέση που συνδέει το μέτρο της δύναμης του βάρους του σώματος με το μέτρο της δύναμης F που ασκεί ο άνθρωπος και τη γωνία $\hat{\theta}$ που αντιστοιχεί στο τμήμα του νήματος που είναι τυλιγμένο στη δοκό και ορίζεται από τις ακτίνες που αντιστοιχούν στα ακραία σημεία επαφής του νήματος με τη δοκό.Δίνεται ότι το βάρος του σώματος W είναι μικρότερο από το όριο θραύσης του νήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Έστω $\overset{\frown}{AB}$ ένα στοιχειώδες τόξο $\overset{\frown}{\Delta s}$ του νήματος που είναι τυλιγμένο στη δοκό. Αν υποθέσουμε ότι το νήμα μόλις δεν ολισθαίνει προς τα δεξιά (Σχήμα 1),τότε με αρκετή καλή προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη της στατικής τριβής $T_{στ}$ που έχει φορά προς τ' αριστερά και η κάθετη αντίδραση της δοκού πάνω στη ράβδο N ,ασκούνται στο μέσο M του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

Η κάθετη αντίδραση N είναι $N=N^{*}\ \Delta s$ (1) όπου N^{*} = η κάθετη αντίδραση ανά μονάδα μήκους του νήματος και η στατική τριβή είναι $T_{στ} = \mu_s N^{*}\ \Delta s$ (2).Για το αβαρές νήμα ισχύουν: T=F (3) και T'=W (4). Αναλύουμε τις δυνάμεις κατά τη διεύθυνση xx' της εφαπτομένης προς το στοιχειώδες τόξο $\overset{\frown}{\Delta s}$ και την κάθετη προς αυτή yy'.Επειδή το τμήμα μήκους Δs του νήματος είναι σε στατική ισορροπία:



(Σχήμα 1)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\ συν(\frac{\Delta\theta}{2}) + T_{στ} = T'\ συν(\frac{\Delta\theta}{2}) \overset{(2)}{\Longrightarrow} T\ συν(\frac{\Delta\theta}{2}) + \mu_s N^{*}\ \Delta s = T'\ συν(\frac{\Delta\theta}{2})$ (5).Από τη σχέση αυτή είναι προφανές ότι T' > T, άρα η T' μπορεί να γραφεί T'=T+ΔT (6).Από (5) $\overset{(6)}{\Longrightarrow}$

$$T\,συν(\frac{Δθ}{2}) + μ_s N^* Δs = (T+ΔT)\,συν(\frac{Δθ}{2}) \Longrightarrow$$

$$T\,συν(\frac{Δθ}{2}) + μ_s N^* Δs = T\,συν(\frac{Δθ}{2}) + ΔT συν(\frac{Δθ}{2}) \Longrightarrow$$

$μ_s N^* Δs = ΔT\,συν(\frac{Δθ}{2})$ αλλά $Δθ \to 0$ και $συν(\frac{Δθ}{2})=1$,άρα $μ_s N^* Δs = ΔT$ (7)

$$ΣF_y = 0 \Rightarrow N^* Δs = T\,ημ(\frac{Δθ}{2}) + T'\,ημ(\frac{Δθ}{2}) \overset{(6)}{\Longrightarrow} N^* Δs = T\,ημ(\frac{Δθ}{2}) + (T+ΔT)\,ημ(\frac{Δθ}{2}) \Rightarrow$$

$N^* Δs = 2T\,ημ(\frac{Δθ}{2}) + ΔT\,ημ(\frac{Δθ}{2})$ ο όρος $ΔT\,ημ(\frac{Δθ}{2})$ μπορεί να αμεληθεί ως γινόμενο στοιχειωδών μεταβολών (δεύτερης τάξης απειροστή μεταβολή) και επειδή $Δθ \to 0$:

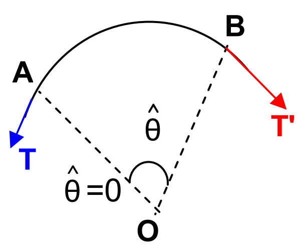
$ημ(\frac{Δθ}{2}) \approx \frac{Δθ}{2}$ έχουμε: $N^* Δs = T\,Δθ \overset{(7)}{\Longrightarrow} \frac{ΔT}{μ_s} = T\,Δθ \Rightarrow ΔT = μ_s T\,Δθ \Rightarrow \frac{ΔT}{T} = μ_s\,Δθ$

ή $\frac{dT}{T} = μ_s\,dθ$ παίρνουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_T^{T'} \frac{dT}{T} = μ_s \int_0^θ dθ \Rightarrow [\ln T]_T^{T'} = μ_s [θ]_0^θ$

$\Rightarrow \ln T' - \ln T = μ_s θ \Rightarrow T' = T e^{μ_s θ}$ (8)

Όπου T =η τάση στο άκρο A ($\hat{θ}=0$), T' =η μεγαλύτερη τάση στο άκρο B του στοιχειώδους τόξου Δs και $\hat{θ}$= η γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα άκρα A και B. (Σχήμα 2) Αλλά από τις (3) και (4) η (8) γίνεται :

$$W = F e^{μ_s θ} \quad (S.I)$$



(Σχήμα 2)

ΣΧΟΛΙΑ

1.Η σχέση $N^* Δs = T\,Δθ$ γράφεται: $N^* = T\frac{Δθ}{Δs} \Rightarrow N^* = \frac{T}{\frac{Δs}{Δθ}} \Rightarrow N^* = \frac{T}{R}$ όπου R=η ακτίνα της δοκού και συνδέει την ακτίνα R με την κάθετη αντίδραση ανά μονάδα μήκους N^* και την τάσηT.

2.Η σχέση $W = F e^{μ_s θ}$ για θ=0 δίνει W=F δηλαδή όταν το νήμα δεν είναι τυλιγμένο στη δοκό ο άνθρωπος πρέπει να ασκεί δύναμη ίση με το βάρος του σώματος για να το συγκρατεί ακίνητο.

3.

	θ=0	θ=π	θ=3π	
μ=0,1	W=F	W_1=1,105F	W_2=2,565F	$\frac{W_2}{W_1}$=**2,321**
μ=0,2	W=F	W_1=1,873F	W_2=6,579F	$\frac{W_2}{W_1}$=**3,512**
μ=0,5	W=F	W_1=4,806F	W_2=110,520F	$\frac{W_2}{W_1}$=**23,106**

Στον παραπάνω πίνακα φαίνεται η σχέση ανάμεσα στο βάρος W του σώματος που ανυψώνεται και τη δύναμη F που ασκεί ο άνθρωπος για μερικές τιμές του συντελεστή οριακής στατικής τριβής (μ_s =0,1, μ_s =0,2, μ_s =0,5) και για δύο τιμές της γωνίας $\hat{\theta}$ που αντιστοιχεί στο τυλιγμένο στη δοκό τμήμα του νήματος ($\hat{\theta}$=π, και $\hat{\theta}$=3π).

Για θ_1=π και μιά ενδεικτική τιμή μ_s =0,5 έχουμε : $W_1=F\,e^{1,57} \Rightarrow W_1=4,806F$. Αν τυλίξουμε το νήμα πλήρως μία φορά ακόμα τότε θ_2=3π και $W_2=F\,e^{4,71} \Rightarrow W_2=111,052F$ δηλαδή $\frac{W_2}{W_1}=\frac{111,052F}{4,806F} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1}$ =23,106, δηλαδή αρκεί να τυλιχθεί το νήμα μία επιπλέον φορά στη δοκό για να σηκώσει ο άνθρωπος 23 φορές περίπου μεγαλύτερο βάρος ασκώντας την ίδια δύναμη F !!! Φαίνεται ότι η καθημερινή εμπειρία δίδαξε πολύ νωρίς τους ανθρώπους.

Ξ.ΣΤΕΡΓΙΑΔΗΣ