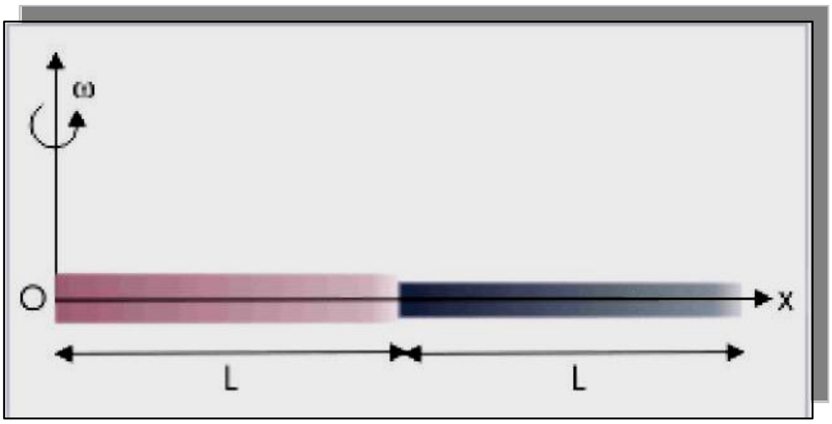
Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της στροφορμής

Μια λεπτή ράβδος με μάζα M και μήκος L , έχει τοποθετηθεί στο εσωτερικό ενός κούφιου κυλίνδρου με τον διαμήκη άξονά της παράλληλα προς τον άξονα συμμετρίας αυτού (ο άξονας x'x στο σχήμα). Ο κύλινδρος έχει την ίδια μάζα και το ίδιο μήκος με τη ράβδο και είναι στερεωμένος στο άκρο του Ο. Η ράβδος είναι ελεύθερη να γλιστρά χωρίς τριβές κατά μήκος του κυλίνδρου. Το σύστημα βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Θέτουμε το σύστημα σε περιστροφική κίνηση γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο Ο και είναι κάθετος στον x'x. Η αρχική γωνιακή ταχύτητα **ω** του συστήματος είναι όπως στο σχήμα.

Κατά τη διάρκεια της κίνησης η ράβδος γλιστρά εξολοκλήρου έξω από τον κύλινδρο, καθώς δεν υπάρχει η αναγκαία κεντρομόλος δύναμη που θα συγκρατούσε το κέντρο μάζας της σε κυκλική τροχιά περί το Ο.



Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος τότε.. Δίδεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο διαμήκη άξονά του είναι $I=ML^2/12$. Ομοίως και η ροπή του κούφιου κυλίνδρου (ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο διαμήκη άξονά του είναι $I=ML^2/12$)

Λύση

Μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $\boldsymbol{\Sigma\tau}_{\varepsilon\xi}=0$ καθώς οι ροπές των βαρών της ράβδου και του κυλίνδρου , αλλά και οι ροπές των δυνάμεων του επιπέδου στήριξης είναι μηδενικές ως προς τον άξονα περιστροφής (καθώς οι φορείς των δυνάμεων αυτών είναι παράλληλοι προς τον άξονα αυτόν.

Κατά συνέπεια μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της διατήρησης στροφορμής για το σύστημα.

$L_{αρχ}$=$L_{τελ}$→$I_{αρχ}$ $ω_{αρχ}$ =$I_{τελ}ω_{τελ}$ (1)
Ας προσέξουμε τον υπολογισμό των ροπών αδράνειας στη παραπάνω σχέση. Αρχικά τόσο η ράβδος όσο και ο κύλινδρος έχουν τα κέντρα μάζας τους στο ίδιο σημείο του χώρου . Πρέπει ωστόσο να εφαρμόσουμε το θεώρημα Steiner ώστε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Ο .

$$I_{αρχ} = \left\{\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right\} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$I_{αρχ} = \frac{2ML^2}{3}$$

Τελικά για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας του συστήματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και πάλι το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων , λαμβάνοντας όμως υπόψη ότι τα κέντρα μάζας των ράβδου , κυλίνδρου βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις.

$$I_{τελ} = \left\{\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right\} + \left\{\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{3L}{2}\right)^2\right\} \Rightarrow$$

$$I_{αρχ} = \frac{8ML^2}{3}$$

Συνεπώς :

$$\frac{2ML^2}{3}\omega_{αρχ} = \frac{8ML^2}{3}\omega_{τελ} \Rightarrow$$

$$\omega_{αρχ} = 4\omega_{τελ} \Rightarrow$$

$$\omega_{τελ} = \frac{\omega_{αρχ}}{4}$$

Μακρή Δέσποινα , Φυσικός.
depymak@ath.forthnet.gr