

Λύνοντας τη γενική ΔΕ 1^{ης} τάξης με άλγεβρα

Ν. Παναγιωτίδης, υπεύθυνος του ΕΚΦΕ Ιωαννίνων

Η γενική ΔΕ 1^{ης} τάξης είναι:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x), \quad (1)$$

Ας τη γράψουμε στη μορφή:

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)y = b, \quad (2)$$

Έστω $A(x)$ μια οποιαδήποτε αρχική συνάρτηση της $a(x)$,

$$A(x) = \int a(x) dx, \quad (3)$$

Έστω επίσης $f(x)$ μια οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ισχύει η σχέση:

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)e^{-A}f = e^{-A}\frac{d}{dx}f, \quad (4)$$

όπως πολύ εύκολα αποδεικνύεται με χρήση των κανόνων παραγωγίσιμης. Η Εξ. (4) μας λέει ότι οι τελεστές $\left(\frac{d}{dx} + a\right)e^{-A}$ και $e^{-A}\frac{d}{dx}$, αν δράσουν στην ίδια συνάρτηση, δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Επομένως οι τελεστές αυτοί είναι ισοδύναμοι:

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)e^{-A} = e^{-A}\frac{d}{dx}, \quad (5)$$

Στο εξής τον τελεστή $\frac{d}{dx}$ θα τον γράφουμε σαν D . Η Εξ. (5) τώρα γράφεται:

$$(D + a)e^{-A} = e^{-A}D, \quad (6)$$

Θεωρώντας τον D σαν αλγεβρική ποσότητα, η Εξ. (6) είναι μια αλγεβρική εξίσωση¹ την οποία μπορούμε να χειριστούμε αλγεβρικά, αν και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Ας γυρίσω τώρα στην διαφορική μου εξίσωση (2) και ας τη γράψω στη μορφή:

$$(D + a)y = b, \quad (7)$$

Αν πολλαπλασιάσω από αριστερά με $(D + a)^{-1}$, έχω:

$$y = (D + a)^{-1}b, \quad (8)$$

Άρα δεν έχω παρά να υπολογίσω το $(D + a)^{-1}$. Από την Εξ. (6), αν πολλαπλασιάσω με e^A από δεξιά, έχω:

$$D + a = e^{-A}De^A, \quad (9)$$

Ας παρατηρήσω τώρα ότι η ποσότητα $e^{-A}D^{-1}e^A$ είναι αντίστροφη της $e^{-A}De^A$. Πράγματι:

¹ Στην κβαντική μηχανική η Εξ. (6) λέγεται μεταθετική εξίσωση και γράφεται στη μορφή $[e^{-A}, D] = ae^{-A}$ όπου ο «μεταθέτης» $[e^{-A}, D]$ ορίζεται από τη σχέση $[e^{-A}, D] = e^{-A}D - De^{-A}$.

$$(e^{-A}D^{-1}e^A)(e^{-A}De^A) = e^{-A}D^{-1}De^A = e^{-A}e^A = 1, \quad (10)$$

όπως επίσης και $(e^{-A}De^A)(e^{-A}D^{-1}e^A)=1$. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (9):

$$(D + a)^{-1} = e^{-A}D^{-1}e^A, \quad (11)$$

Επομένως υπολόγισα το πολυπόθητο $(D + a)^{-1}$ και έλυσα την ΔΕ. Πράγματι, αντικαθιστώντας στην Εξ. (8) έχω:

$$y = e^{-A}D^{-1}e^Ab, \quad (12)$$

Στα βιβλία των διαφορικών εξισώσεων η λύση της γενικής διαφορικής εξίσωσης 1^{ης} τάξης, δίνεται στη μορφή:

$$y = e^{-A} \int e^A b dx, \quad (13)$$

Η Εξ. (13) δεν διαφέρει από την Εξ. (12), αρκεί ο τελεστής D^{-1} να ταυτιστεί με τον τελεστή της αόριστης ολοκλήρωσης.