

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Ν ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα Ν σωματιδίων που κινούνται υποκείμενα σε δεσμούς (constraints). Παραδείγματος χάρι, όταν μιλάμε για στερεό σώμα, ένας δεσμός είναι το γεγονός ότι οι αποστάσεις $\vec{r}_{ij}$ των διαφόρων υλικών σημείων πρέπει να παραμένουν σταθερές. Άλλο παράδειγμα είναι ένα δακτυλίδι που μπορεί να κινείται σε μια κυκλική στεφάνη.

Ένας δεσμός λέγεται ολόνομος (holonomic) αν μπορεί να εκφρασθεί μέσω μαθηματικής σχέσης της μορφής:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, t) = 0 \quad (1)$$

Ένα σύστημα Ν σωματιδίων, χωρίς δεσμούς έχει $3N$ ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας. Τώρα αν το (ολόνομο) σύστημα υπόκειται σε K δεσμούς (όπως στην παραπάνω σχέση), τότε οι βαθμοί ελευθερίας του γίνονται $3N - K$. Τότε μπορούμε να εισάγουμε $3N - K$ νέες ανεξάρτητες συντεταγμένες, τις $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N-K}$, συναρτήσει των οποίων οι παλιές συντεταγμένες γράφονται:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N-K}, t) \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N-K}, t) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N-K}, t)$$

Για ένα σύστημα που υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς μπορεί και υπόκειται σε δυνάμεις, που προέρχονται από συνήθη ή γενικευμένα δυναμικά, μπορεί κανείς να κατασκευάσει την Λαγκρανζιανή (Lagrangian), και συνακόλουθα να εξάγει τις εξισώσεις της κίνησης. Για το σκοπό αυτό πρέπει να εκφράσει την κινητική και την δυναμική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων. Για την κινητική ενέργεια T , η μετατροπή των Καρτεσιανών σε γενικευμένες συντεταγμένες γίνεται μέσω των σχέσεων (2) .

Τότε στη γενικότερη περίπτωση η κινητική ενέργεια γράφεται:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (3)$$

Μετά τις πράξεις, είναι φανερό ότι θα προκύψουν (μετά την ομαδοποίηση) τρεις προσθετέοι, με τη γενική μορφή:

$$T = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (4)$$

Όπου τα: M_0 , M_j και M_{jk} είναι συναρτήσεις των $\vec{r}$ και του t (άρα των $\vec{q}$ και του t).

Με σύγκριση των όρων προκύπτει ότι:

$$M_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (5)$$

$$M_j = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (6)$$

$$M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (7)$$

Έτσι στη γενική περίπτωση η κινητική ενέργεια του συστήματος σωματιδίων μπορεί πάντοτε να γραφεί σαν το άθροισμα τριών όρων, που είναι ομογενείς συναρτήσεις των γενικευμένων ταχυτήτων.

Δηλαδή, μπορούμε να γράψουμε (στη γενικότερη περίπτωση):

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (8)$$

όπου:

T_0 είναι συνάρτηση ανεξάρτητη των γενικευμένων ταχυτήτων,

T_1 είναι γραμμική συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων,

T_2 είναι δευτεροβάθμια συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων.

Αυτά στη γενικότερη περίπτωση. Αν όμως οι δεσμοί (constraints) είναι ανεξάρτητοι του χρόνου (σκληρόνομο σύστημα), τότε οι όροι T_0 και T_1 μηδενίζονται και «επιζεί» μόνο ο όρος T_2 . (Δηλαδή τότε η κινητική ενέργεια είναι ομογενής δευτεροβάθμια συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

1. **Classical Mechanics, Third Edition, Goldstein, Poole & Safko, Pearson 2002**
2. **Classical Dynamics, Marion & Thornton, 4th Edition, Harcourt Brace & Company, 1995**

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ