

Η
«ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ»
ΤΗΣ
ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΦΥΣΙΚΟΣ

MSc. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΗΣ 2011

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Αφορμή για την παρακάτω εργασία αποτέλεσε μια παρατήρηση του συνάδελφου (και φίλου) **Διονύση Μητρόπουλου**, για την «**προσθετική ιδιότητα**» της κινητικής ενέργειας. Μοιάζει, κατά κάποιο τρόπο σαν να μπορούμε να πάρουμε την κινητική ενέργεια σε κάθε άξονα και μετά προσθέτοντας να βρούμε τη συνολική. Ισχύει όμως πάντα αυτό;

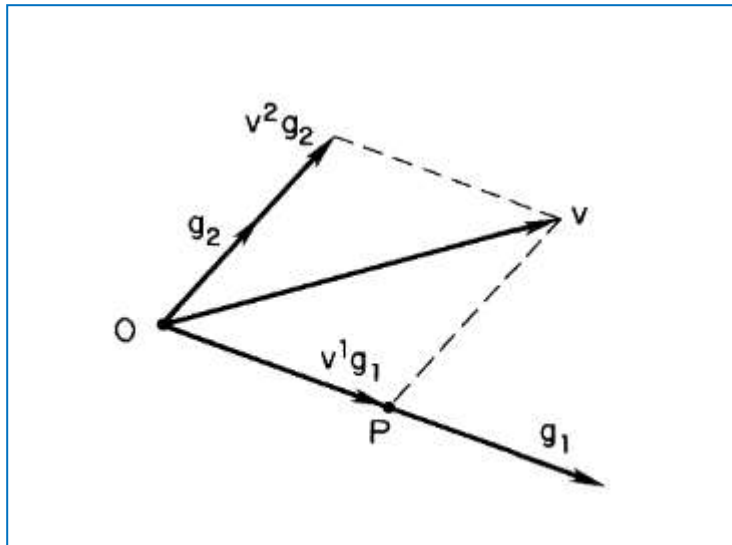
Στο ερώτημα αυτό, σχεδόν αμέσως, ήρθε η διορατική (και σωστή) απάντηση από το συνάδελφο και φίλο **Διονύση Μάργαρη**:
Έχω την αίσθηση ότι οι κάθετοι άξονες και το πυθαγόρειο θεώρημα είναι οι "φταίχτες"...

Με την άποψη αυτή συμφώνησα αμέσως, ένοιωσα όμως και την ανάγκη να την στηρίξω.

Σημαντικό ρόλο έπαιξε και η ανάγνωση του εξαιρετικού άρθρου του συνάδελφου **Δημήτρη Τσαούση (PhD)**, [Η προσθετική ιδιότητα της ενέργειας](#) από το οποίο μάλιστα έκλεψα τον τίτλο.

Επίσης, η εξαιρετική ανάρτηση: [**Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ των ταυτόχρονων κινήσεων**](#), του συνάδελφου **Ανδρέα Κασσέτα**. (στην οποία οδηγήθηκα μετά από υπόδειξη του φίλου και συνάδελφου, **Γιάννη Κυριακόπουλου**).

Η «ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ» ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ



Θεωρούμε τους άξονες του παραπάνω σχήματος που συνιστούν ένα πλάγιο σύστημα αξόνων. Τα g_1 και g_2 είναι τα μοναδιαία διανύσματα πάνω στους δύο αυτούς άξονες. Να μη διαφεύγει της προσοχής μας ότι αφού τα δύο διανύσματα αυτά δεν είναι κάθετα, αλλά σχηματίζουν γωνία θ μεταξύ τους, το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με $\cos\theta$ και όχι με μηδέν, όπως θα συνέβαινε αν $\theta=90^\circ$. Στη συνέχεια αναλύουμε την ταχύτητα v στους δύο αυτούς άξονες και παίρνουμε τις «ανταλλοιώτες»

(contravariant) συνιστώσες v^1 και v^2 αντίστοιχα (προσοχή τα 1 και 2 δεν είναι εκθέτες, αλλά δείκτες). Μας δίνουν τις αντίστοιχες συνιστώσες. Το συμβολισμό αυτό θα τον χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Θέλει πράγματι λίγη εξάσκηση για να μπορεί κανείς να καταλάβει πότε πρόκειται για δείκτες και πότε για εκθέτες). Τις δύο αυτές συνιστώσες συμβολίζουμε με v^a , όπου το a παίρνει τις τιμές 1 και 2. Σε περίπτωση που εργαζόμαστε σε τρεις διαστάσεις, ο δείκτης a παίρνει τις τιμές 1,2 και 3. Η μετρική των δύο αξόνων που επιλέξαμε, περιγράφεται από τον μετρικό τανυστή, στην περίπτωση μας συμμετρικό πίνακα 2x2 (Αντίστοιχα στις 3 διαστάσεις ο μετρικός τανυστής είναι ένας [συμμετρικός πίνακας](#) 3x3):

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

όπου θεωρούμε τα $\mathbf{g}_1$ και $\mathbf{g}_2$, σαν τα μοναδιαία διανύσματα πάνω στους δύο (πλάγιους) άξονες, και με $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2$, κλπ. εννοούμε το εσωτερικό τους γινόμενο.

Προκειμένου να βρούμε την κινητική ενέργεια του σώματος θα χρειασθούμε το [εσωτερικό γινόμενο](#) $\vec{v} \cdot \vec{v}$. Στην περίπτωση μας όμως και επειδή η μετρική δεν είναι Ευκλείδεια (δεν ισχύει το Πυ-

θαγόρειο, αφού έχουμε μή μηδενικά τα μη διαγώνια στοιχεία του μετρικού τανυστή), για να βρούμε το εν λόγω εσωτερικό γινόμενο θα χρειασθούμε και τις «συναλλοίωτες» (covariant) συνιστώσες, δηλαδή τις v_a . Και τότε θα έχουμε:

$$v^2 = v_a v^a \quad (2).$$

όπου θεωρούμε την [σύμβαση άθροισης του Einstein](#), (επαναλαμβανόμενος πάνω και κάτω δείκτης σημαίνει άθροιση σ' όλες τις δυνατές τιμές του) δηλαδή:

$$v^2 = v_a v^a = v_1 v^1 + v_2 v^2 \quad (3)$$

Όμως βρίσκουμε τις covariant συνιστώσες, αν ξέρουμε τις contravariant, δηλαδή «κατεβάζουμε» δείκτες μέσω της μετρικής.

Δηλαδή:

$$v_a = g_{ab} v^b \quad (4)$$

όπου θεωρούμε και πάλι την [σύμβαση άθροισης του Einstein](#) (*Einstein's summation convention*), σύμφωνα με την οποία επαναλαμβανόμενος δείκτης (στη (2) το b), ονομάζεται [βουβός](#) (dummy index) και σημαίνει άθροιση. Ένας [βουβός δείκτης](#) μπορεί να αντικατασταθεί με όποιο γράμμα θέλουμε.

Δηλαδή, π.χ:

$$v_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2 = v^1 + \cos\theta v^2 \quad (5)$$

Έτσι λοιπόν το εσωτερικό γινόμενο γράφεται:

$$v^2 = v_a v^a = g_{ab} v^a v^b \quad (6),$$

ή

$$v^2 = v_a v^a = g_{ab} v^a v^b =$$

$$= g_{11}(v^1)^2 + g_{12}v^1v^2 + g_{21}v^2v^1 + g_{22}(v^2)^2$$

ή

$$v^2 = (v^1)^2 + 2\cos\theta v^1v^2 + (v^2)^2 \quad (7).$$

Οπότε τελικά:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$E_k = \frac{1}{2}m[(v^1)^2 + (v^2)^2 + 2\cos\theta v^1v^2]$$

 (8)

ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

i) $\theta = 60^\circ$,

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{και η (8) γράφεται:}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m[(v^1)^2 + (v^2)^2 + v^1 v^2] \quad (9)$$

Φαίνεται δηλαδή καθαρά ότι στην περίπτωση αυτή η ολική κινητική ενέργεια ισούται με το άθροισμα των δύο «επιμέρους» κινητικών ενεργειών, αυξημένο κατά την ποσότητα:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^1 v^2$$

ii) $\theta = 90^\circ$

$$\cos \theta = 0, \quad \text{και η (7) γράφεται:}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m[(v^1)^2 + (v^2)^2] = E_{k,1} + E_{k,2} \quad (10)$$

Στη σχέση (10), παρατηρούμε ότι η άθροιση των δύο επί μέρους κινητικών ενεργειών μας δίνει την ολική κινητική ενέργεια. Αυτό συμβαίνει γιατί οι δύο άξονες είναι κάθετοι, οπότε $\cos\theta=0$, δηλαδή τα μη-διαγώνια στοιχεία του μετρικού τανυστή μηδενίζονται. Τότε ο μετρικός τανυστής γράφεται:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Στην περίπτωση αυτή, εύκολα βλέπει κανείς ότι οι covariant και οι contravariant (ν_a και ν^a) συνιστώσες της ταχύτητας ταυτίζονται. Είναι η απλή περίπτωση, όπου για να βρούμε το τετράγωνο του διανύσματος απλά έχουμε:

$$\begin{aligned} \nu^2 &= \nu_a \nu^a = \nu_1 \nu^1 + \nu_2 \nu^2 \\ &\quad \text{ή} \\ \nu^2 &= \nu^1 \nu^1 + \nu^2 \nu^2 = (\nu^1)^2 + (\nu^2)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Επίσης, στην περίπτωση αυτή το «στοιχείο μήκους» (line element) είναι:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

(13)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

i) Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας (special theory of relativity), ο μετρικός τανυστής του ενοποιημένου «χωρόχρονου» είναι:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{mostly plus}) \quad (14)$$

Οπότε:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

 (15)

Παρατηρήστε ότι ο χώρος μοιάζει Ευκλείδειος. Μας τη χαλάει το πρόσημο – μπροστά απ' το dt . Γι' αυτό και ονομάζεται ψευδο-ευκλείδειος

Σε άλλα βιβλία (και σε μας παρακάτω) προτιμάται η μετρική:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{mostly minus}) \quad (16)$$

Οπότε:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (17)$$

ii) Για τις Καρτεσιανές συντεταγμένες στο συνηθισμένο τρισδιάστατο χώρο, η μετρική είναι:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{A}$ στο χώρο αυτό, με συνιστώσες: A^1, A^2, A^3 (οι τρεις συνιστώσες στους άξονες x,y,z).

Πως θα βρούμε τις A_1, A_2, A_3 ;

Φυσικά, μέσω της μετρικής, με τη βοήθεια της σχέσης:

$$A_a = g_{ab} A^b \quad (19)$$

Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να βρούμε πχ τη συνιστώσα A_1 . Εφαρμόζουμε τη σχέση (19). (Πάντα έχουμε στο μυαλό μας την [σύμβαση Einstein](#), ότι δηλαδή επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση σ' όλες τις δυνατές τιμές του).

Θα είναι λοιπόν:

$$A_1 = g_{1b} A^b = g_{11} A^1 + g_{12} A^2 + g_{13} A^3$$

ή

$$A_1 = 1.A^1 + 0.A^2 + 0.A^3 = A^1.$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι: $A_2 = A^2$ και $A_3 = A^3$. Δηλαδή στο

συνήθη τρισδιάστατο χώρο και για ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, οι Contravariant και οι Covariant συνιστώσες ενός διανύσματος ταυτίζονται! Αυτός είναι και ο λόγος που δεν αναφερόμαστε (ούτε καν ονομαστικά) σ' αυτές.

iii) Συνήθως ο μετρικός τανυστής στις τρεις διαστάσεις έχει δείκτες, τους οποίους συμβολίζουμε με a, b . Δηλαδή: $a, b = 1, 2, 3$. Στον [τετραδιάστατο χωρόχρονο](#) (Σχετικότητα) συνήθως επιλέγουμε για τους δείκτες τα γράμματα μ, ν και μάλιστα θεωρούμε ότι: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Έτσι το τετράνυσμα (ή τετραδιάνυσμα) «θέσης» (4-vector) x^μ ορίζεται ως:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (20)$$

όπου $x^0=t$ (παίρνουμε την ταχύτητα του φωτός $c=1$), και

$$(x^1, x^2, x^3) = \vec{x}.$$

Ένα σπουδαίο τετράνυσμα είναι αυτό της «ενέργειας-ορμής»

(energy-momentum 4-vector). Αυτό είναι:

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \quad , \text{ όπου για σωματίδιο μάζας } m ,$$

$$\text{η ενέργεια είναι } E = (\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (c=1) \quad .$$

Ένα άλλο σπουδαίο είναι το 4-gradient, που ορίζεται:

$$\mathcal{G}^\mu = (\mathcal{G}^0, -\vec{\nabla}) \quad , \quad \text{ όπου:}$$

$$\mathcal{G}^0 = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}t} \quad \text{ και: } \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}x^1}, \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}x^2}, \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}x^3} \right)$$

Το εσωτερικό γινόμενο λοιπόν δύο τετρανυσμάτων είναι:

$$A.B = A^\mu B_\mu = A^0 B_0 - \vec{A}.\vec{B}$$

iv) Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει στην περίπτωση του τετραδιάστατου χωρόχρονου της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (Minkowski). Θεωρούμε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και επιλέγουμε τη μετρική:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (mostly minus)} \quad (21)$$

Θα έχουμε και πάλι:

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} \quad (21)$$

Για μια ακόμη φορά να τονίσουμε ότι ισχύει η [σύμβαση Einstein](#). (Επαναλαμβανόμενος δείκτης – [βουβός δείκτης](#)- σημαίνει άθροιση σ' όλες τις δυνατές τιμές του)

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε ένα τετραδιάνυσμα με συνιστώσες A^0, A^1, A^2, A^3

Θέλουμε να βρούμε τις: A_0, A_1, A_2, A_3

Πάμε λοιπόν να βρούμε την συνιστώσα A_0

Θα έχουμε:

$$A_0 = g_{0b}A^b = g_{00}A^0 + g_{01}A^1 + g_{02}A^2 + g_{03}A^3$$

ή,

$$A_0 = 1.A^0 + 0.A^1 + 0.A^2 + 0.A^3 = A^0$$

Έχουμε δηλαδή: $A_0 = A^0$.

Πάμε τώρα να βρούμε τη συνιστώσα: A_1

Θα έχουμε:

$$A_1 = g_{1b}A^b = g_{10}A^0 + g_{11}A^1 + g_{12}A^2 + g_{13}A^3$$

ή,

$$A_1 = 0.A^0 - 1.A^1 + 0.A^2 + 0.A^3 = -A^1$$

Βρίσκουμε δηλαδή ότι: $A_1 = -A^1$

Με όμοιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ότι: $A_2 = -A^2$ και $A_3 = -A^3$

THE EINSTEIN SUMMATION CONVENTION

Η σύμβαση άθροισης του Einstein (*Einstein's summation convention*) είναι ένας γρήγορος τρόπος για να γράφει κανείς αθροίσματα. Όταν ο ίδιος δείκτης εμφανίζεται δύο φορές (τη μια σαν

πάνω και την άλλη σαν κάτω δείκτης) σε μια έκφραση, τότε αυτό σημαίνει άθροιση σε όλες τις δυνατές τιμές που παίρνει ο δείκτης.

Για παράδειγμα:

(τρόπος γραφής χωρίς τη σύμβαση Einstein):

$$\sum_{i=1}^3 A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$

(τρόπος γραφής με τη σύμβαση Einstein):

$$A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 ,$$

Δηλαδή:

$$A_i B^i \leftrightarrow \sum_{i=1}^3 A_i B^i$$

ΒΟΥΒΟΙ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΟΙ ΔΕΙΚΤΕΣ

Ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης, με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, λέγεται «βουβός δείκτης» (dummy index) και μπορεί να αντικατασταθεί με κάποιο άλλο γράμμα, αν αυτό βολεύει. Αντίθετα ένας μη επαναλαμβανόμενος δείκτης

χαρακτηρίζεται σαν ελεύθερος (free) και πρέπει να εμφανίζεται και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης.

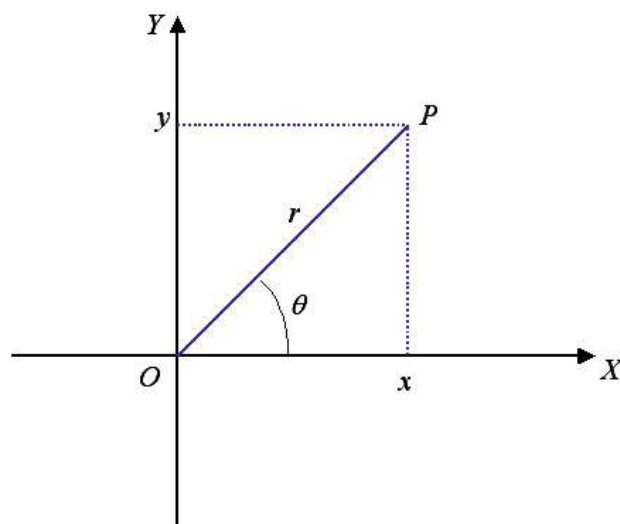
Για παράδειγμα στην εξίσωση:

$$S^a T_{ab} = S^c T_{cb} ,$$

οι δείκτες a και c είναι βουβοί (άθροιση), ενώ ο δείκτης b είναι ελεύθερος. Αν αλλάξετε το βουβό δείκτη c στο δεύτερο μέλος και τον «κάνετε» a , φαίνεται αμέσως η ισότητα των δύο μελών.

ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει αν χρησιμοποιήσουμε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Ας περιοριστούμε στο επίπεδο και ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας «πολικές συντεταγμένες» (polar coordinates).



Να τονίσουμε προκαταβολικά ότι οι πολικές συντεταγμένες αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα συντετεγμένων. Δηλαδή ισχύει:

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0,$$

όπου $\hat{r}$ το μοναδιαίο στην κατεύθυνση του $\vec{r}$ και $\hat{\theta}$ το μοναδιαίο στην κάθετη κατεύθυνση στο $\vec{r}$. Στην περίπτωση μας λοιπόν ισχύουν:

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

Οι συνιστώσες λοιπόν της ταχύτητας είναι:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \theta) = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad \text{και}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r \sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

Επομένως στην περίπτωση μας η κινητική ενέργεια γράφεται:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{ή}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m [(\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)^2]$$

ή

$$E_k = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2]$$

Τώρα, οι συνιστώσες της ταχύτητας στις πολικές συντεταγμένες είναι:

Κατά μήκος του $\vec{r}$, η συνιστώσα είναι: $\dot{r}$.

Στην κάθετη διεύθυνση στο $\vec{r}$, η συνιστώσα είναι: $r \dot{\theta}$

Έτσι λοιπόν:

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 \quad \text{και άρα:}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2]$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι και στις πολικές συντεταγμένες (καμπυλόγραμμο σύστημα) ισχύει η «προσθετική ιδιότητα», ακρι-

βώς διότι πρόκειται για ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ σύστημα συντεταγμένων.

Να σημειώσουμε εδώ ότι τα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων που συνήθως χρησιμοποιούμε (*Πολικές, Κυλινδρικές, Σφαιρικές, Παραβολοειδείς, Ελλειπτικές Κυλινδρικές, Διπολικές, Τοροειδείς, Κωνικές, Γεωειδείς Σφαιροειδεις* κλπ) είναι όλα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων.

Μπορούμε να επιτεθούμε στο πρόβλημα και με τη βοήθεια του μετρικού τανυστή. Μιλάμε για πολικές συντεταγμένες. Θεωρούμε λοιπόν ένα «απειροστό» ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία: (r, θ) , $(r+dr, \theta)$, $(r, \theta+d\theta)$. Οι κάθετες πλευρές του είναι τότε: dr και $r d\theta$. Η υποτείνουσα λοιπόν θα είναι:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Όμως στη γενική περίπτωση:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

Με απλή σύγκριση βλέπουμε ότι:

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = r^2,$$

Οπότε ο μετρικός τανυστής είναι:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Τότε λοιπόν για το διάνυσμα της ταχύτητας , με συνιστώσες(ανταλλοιώτες):

$$v^1 = \dot{r} \quad \text{και} \quad v^2 = \dot{\theta}$$

Το τετράγωνο της ταχύτητας είναι:

$$v^2 = v_a v^a = g_{ab} v^a v^b = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

Οπότε βέβαια:

$$E_k = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2]$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή είδαμε ότι η «προσθετική ιδιότητα» της κινητικής ενεργειας, εμφανίζεται **σωστή στα ορθογώνια** (ακόμη και καμπυλόγραμμη) συστήματα συντεταγμένων. Αποδεικνύεται «εσφαλμένη» σε μη-ορθογώνια συστήματα αναφοράς (εκεί δηλαδή που οι συντεταγμένες «μπλέκονται» μεταξύ τους), όπως πχ στους πλάγιους άξονες στο επίπεδο, που μελετήσαμε.

Ο λόγος είναι ότι η κινητική ενέργεια είναι μεν **βαθμωτό** μέγεθος, εξαρτάται όμως από το **τετράγωνο της ταχύτητας**, (το εσωτερικό γινόμενο δηλαδή της ταχύτητας επί τον εαυτό της). Έτσι στα μη ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων, ενώ παραμένει αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς συστημάτων αναφοράς (όπως οφείλει σαν βαθμωτό –scalar- μέγεθος), «χάνει» την «προσθετική» της ιδιότητα. Εμφανίζονται επί πλέον προσθετέοι που οφείλονται στη «μίξη» των συντεταγμένων, που όπως θέλω να ελπίζω, φάνηκε στην εργασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A Brief on Tensor Analysis, 2nd Edition, James G. Simmonds, Springer-Verlag 1994
2. Relativity Demystified, David Mc Mahon, McGraw-Hill 2006
3. Tensor Calculus, David C. Kay, Schaum's Outline Series, 1988
4. Differential Geometry in Physics, Gabriel Lugo. Κατεβαίνει με κλικ στο link:
<http://people.uncw.edu/lugo/courses/diffgeom/dg1.pdf>
5. Classical Mechanics, Third Edition, Goldstein, Poole & Safko, Pearson 2002
6. Classical Dynamics, Marion & Thornton, 4th Edition, Harcourt Brace & Company, 1995
7. [Η προσθετική ιδιότητα της ενέργειας](#), του συναδέλφου Δημήτρη Τσαούση (PhD.)
8. <http://users.sch.gr/kassetas/yPrincipioIndipendenza5.htm>, του συνάδελφου Ανδρέα Κασσέτα.

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΦΥΣΙΚΟΣ

MSc. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ