

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ ΣΕ ΚΥΛΙΣΗ

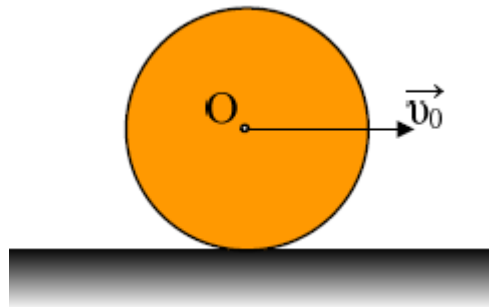
Συμπαγής κύλινδρος μάζας M ο άξονας του οποίου είναι οριζόντιος, ολισθαίνει χωρίς να κυλίεται, με ταχύτητα u_0 πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια και σε διεύθυνση κάθετη στον άξονά του. Κάποια στιγμή που τη θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t=0$), ο κύλινδρος εισέρχεται σε περιοχή που η επιφάνεια γίνεται τραχεία και εμφανίζεται σταθερή δύναμη τριβής ολίσθησης με συντελεστή μ .

A) Να περιγραφεί το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει ο κύλινδρος και να σχεδιασθούν τα διαγράμματα ταχύτητας κέντρου μάζας-χρόνου, γωνιακής ταχύτητας-χρόνου. Σε πόσο χρόνο θα αρχίσει ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;

B) Να βρεθεί ο αριθμός των περιστροφών που διαγράφει ο κύλινδρος μέχρι να αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση στην τραχεία επιφάνεια.

Γ) Ποια η μετατόπιση του κέντρου μάζας και ποιο το έργο της τριβής μέχρι να αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση στην τραχεία επιφάνεια;

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του είναι: $I=(1/2)MR^2$



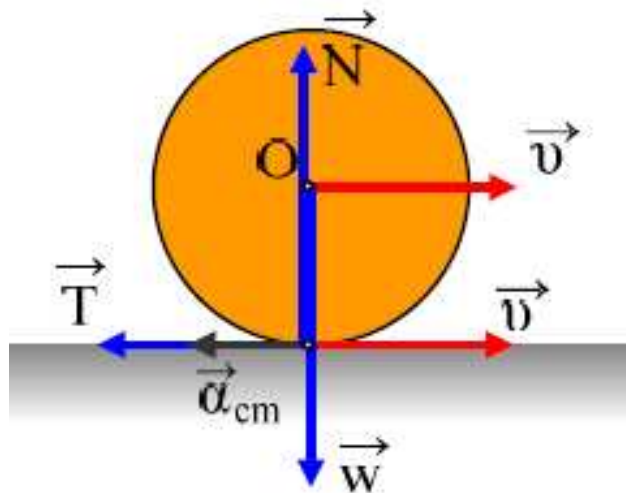
ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Να μελετηθεί η αλλαγή στο είδος της κίνησης που εκτελεί ένα στερεό σώμα και συγκεκριμένα η μετατροπή της ολίσθησης σε κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Να γίνει κατανοητός ο τρόπος υπολογισμού της γωνίας περιστροφής από το διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας-χρόνου.

Να υπολογισθεί το έργο της τριβής ολίσθησης κατά τη διάρκεια της σύνθετης κίνησης δηλαδή κατά τη διάρκεια της κύλισης με ολίσθηση.

A) Ο κύλινδρος θα εφάπτεται με το δάπεδο σ' ένα σημείο, το οποίο αρχικά θα έχει ταχύτητα u_0 , οπότε αναπτύσσεται τριβή ολίσθησης T , με φορά αντίθετη της $\vec{u}_0$. Η τριβή ολίσθησης θα επιβραδύνει τη μεταφορική κίνηση, ενώ η ροπή της θα θέσει σε περιστροφική επιταχυνόμενη κίνηση τον κύλινδρο.



Για τη μεταφορική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma F = T = Ma_{cm} \Rightarrow \mu Mg = Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \mu g = \text{σταθ} \quad (1) \text{ το μέτρο της επιβράδυνσης.}$$

Η στιγμιαία τιμή της μεταφορικής ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο εκφράζεται:

$$v_{cm} = v_o - a_{cm}t = v_o - \mu gt \quad (2)$$

Για την περιστροφική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma \tau = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \mu Mg = \frac{1}{2}MRa_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2\mu g}{R} = \text{σταθ} \quad (3)$$

Η στιγμιαία τιμή της γωνιακής ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο εκφράζεται:

$$\omega = a_{\gamma\omega\nu}t \Rightarrow \omega = \frac{2\mu g}{R}t \quad (4)$$

Η ταχύτητα του εκάστοτε σημείου επαφής κυλίνδρου-δαπέδου εκφράζεται από τη σχέση:

$$v = v_{cm} - \omega R = (v_o - \mu gt) - \frac{2\mu g}{R}Rt = v_o - 3\mu gt$$

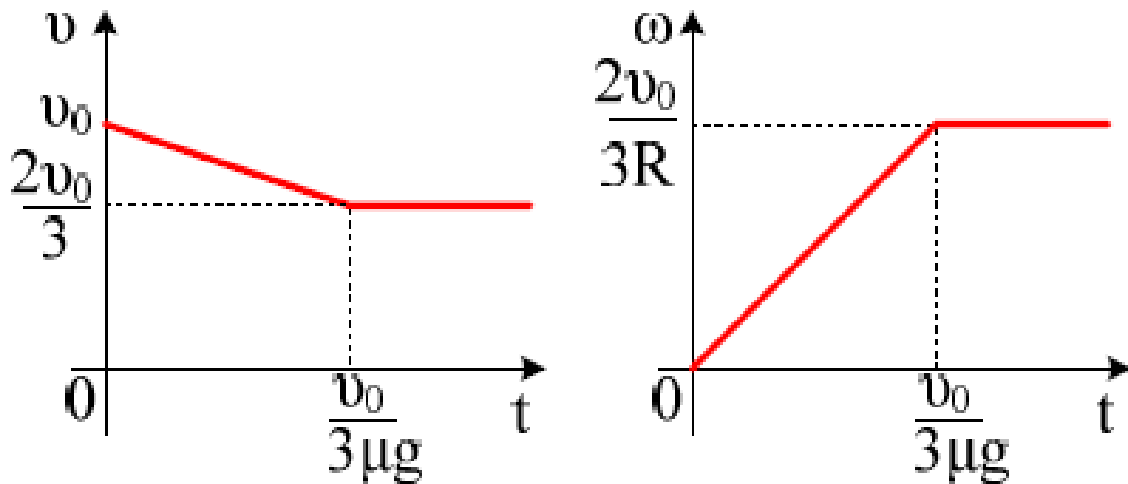
Ο κύλινδρος θα αρχίσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει τη στιγμή όπου η ταχύτητα του σημείου επαφής κυλίνδρου-δαπέδου θα μηδενιστεί:

$$v = 0 \Rightarrow v_o = 3\mu gt \Rightarrow t = \frac{v_o}{3\mu g} \quad (5)$$

Από τη στιγμή αυτή και μετά παύει η ολίσθηση, άρα μηδενίζεται η τριβή. Επομένως τόσο η ταχύτητα του κέντρου μάζας, όσο και η γωνιακή ταχύτητα δε θα μεταβάλλονται. Άρα ο κύλινδρος θα συνεχίσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερές τιμές ταχυτήτων:

$$v_{cm} = v_0 - \mu g \frac{v_o}{3\mu g} \Rightarrow v_{cm} = \frac{2v_0}{3} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{2\mu g}{R} \frac{v_o}{3\mu g} \Rightarrow \omega = \frac{2v_o}{3R}$$

Τα διαγράμματα ταχυτήτων-χρόνου είναι τα ακόλουθα:



Σχόλιο: Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ο κύλινδρος θα κυλιέται χωρίς ποτέ να σταματά, ενώ κάτι τέτοιο στην πράξη δε συμβαίνει. Το σταμάτημα του κυλίνδρου και γενικότερα κάθε κύλισης σε οριζόντιο επίπεδο, προκαλείται από την τριβή κύλισης, η οποία οφείλεται στην παραμόρφωση τόσο του κυλίνδρου, όσο και του δαπέδου. Η μελέτη αυτής της τριβής, ξεφεύγει από τα όρια της λυκειακής φυσικής.

Β) Στο διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας-χρόνου το περικλειόμενο εμβαδό είναι αριθμητικά ίσο με τη γωνιακή μετατόπιση. Συγκεκριμένα το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου είναι αριθμητικά ίσο με τη γωνιακή μετατόπιση από τη στιγμή που εισέρχεται στην τραχεία επιφάνεια μέχρι να αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση:

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{2v_o}{3R} \frac{v_o}{3\mu g} \Leftrightarrow \theta = \frac{v_o^2}{9\mu g R}$$

Όμως:

$$\theta = N \cdot 2\pi \Leftrightarrow N = \frac{\theta}{2\pi} \Leftrightarrow N = \frac{v_o^2}{18\pi\mu g R}$$

Γ) Εφόσον η μεταφορική κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη, η μετατόπιση του κέντρου μάζας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x = v_o t - \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = v_o \frac{v_o}{3\mu g} - \frac{1}{2} \mu g \frac{v_o^2}{9\mu^2 g^2} \Rightarrow x = \frac{5v_o^2}{18\mu g}$$

Ισοδύναμα υπολογίζεται από το **εμβαδό του τραπεζίου στο διάγραμμα υ-τ**:

$$x = \frac{v_o + \frac{2v_o}{3}}{2} \frac{v_o}{3\mu g} = \frac{5v_o}{6} \frac{v_o}{3\mu g} \Leftrightarrow x = \frac{5v_o^2}{18\mu g}$$

Το **έργο της τριβής ολίσθησης** ισούται με τη **μεταβολή της κινητικής ενέργειας**:

$$W_T = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \left(\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 \right) - \frac{1}{2} M v_o^2 = \frac{3}{4} M v^2 - \frac{1}{2} M v_o^2 \Rightarrow$$

$$W_T = \frac{3}{4} M \frac{4v_o^2}{9} - \frac{1}{2} M v_o^2 \Rightarrow W_T = -\frac{1}{6} M v_o^2$$

Ισοδύναμα το **έργο της τριβής ολίσθησης** στη σύνθετη κίνηση, θα είναι το **άθροισμα του έργου της στη μεταφορική κίνηση** (θεωρώντας ότι η τριβή ασκείται στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου) και **του έργου της ροπής της στην περιστροφική κίνηση**:

$$W_T = -Tx + TR\theta \Leftrightarrow W_T = -\mu Mg \frac{5v_o^2}{18\mu g} + \mu MgR \frac{v_o^2}{9\mu gR} \Leftrightarrow W_T = -\frac{5}{18} M v_o^2 + \frac{1}{9} M v_o^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_T = -\frac{1}{6} M v_o^2$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

parasgou@gmail.com