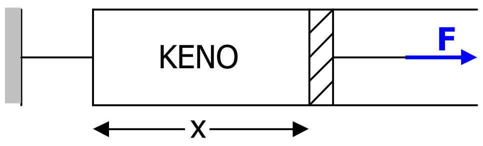
# "ΦΥΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ" ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

**Ελατήρια σταθερής τάσης (Constant tension springs)**

Ένα ελατήριο του οποίου η τάση είναι ανεξάρτητη από την επιμήκυνση ή τη συσπείρωσή του ονομάζεται ελατήριο σταθερής τάσης **(Constant tension springs)**.

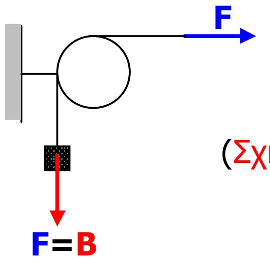
Τέτοια «παράξενα» ελατήρια μπορούν να κατασκευαστούν ως εξής:

**α.** Στο εξωτερικό μέρος ενός εμβόλου που ολισθαίνει χωρίς τριβές σε έναν κύλινδρο που έχει κλειστό το ένα άκρο του και στο εσωτερικό του υπάρχει κενό (Σχήμα 1).



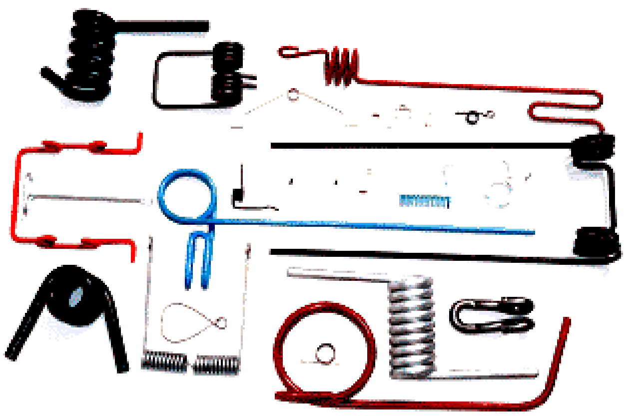

(Σχήμα 1)

**β.** Με τη βοήθεια ενός βάρους (Β) που έχει συνδεθεί με μια τροχαλία (Σχήμα 2).




(Σχήμα 2)

Ως **Δυναμική Ενέργεια (U)** ενός ελατηρίου σταθερής τάσης, ορίζεται το έργο που απαιτείται για να επιμηκυνθεί το ελατήριο από το μήκος αναφοράς του, το οποίο θεωρούμε ότι είναι μηδέν, στο δεδομένο μήκος. Αυτό το έργο είναι ίσο με το γινόμενο της δύναμης της τάσης F επί την επιμήκυνση x: $U=W_F=Fx$.



Μερικές εικόνες ελατηρίων σταθερής τάσης.

## 1ο Πρόβλημα (Η Δυναμική Ενέργεια είναι "προίκα")

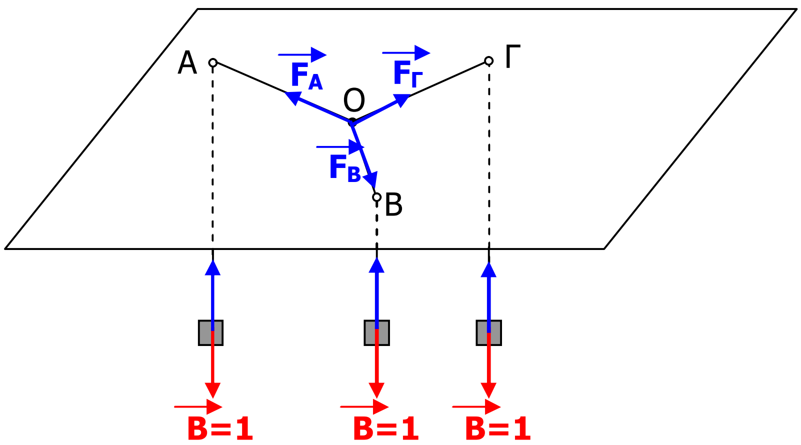
Δίνονται τρία σημεία Α, Β, Γ στο ίδιο επίπεδο. Να βρεθεί το σημείο Ο του επιπέδου για το οποίο το άθροισμα των αποστάσεων των τριών σημείων από αυτό, S=(ΟΑ)+(ΟΒ)+(ΟΓ) είναι ελάχιστο.

### Απάντηση

Θεωρούμε την επιφάνεια ενός τραπεζιού στην οποία ανοίγουμε τρεις οπές, στα σημεία Α, Β και Γ. Συνδέουμε τρία ελατήρια σταθερής τάσης σε ένα σημείο το οποίο το ονομάζουμε Ο. Περνάμε ένα ελατήριο από κάθε μία από τις οπές στα Α, Β, Γ και στα άκρα τους κάτω από το τραπέζι κρεμάμε ίσα βάρη. Υποθέτουμε ότι τα βάρη αυτά είναι ίσα με τη μονάδα (Β=1) (Σχήμα 3). Για να φέρουμε το ελατήριο που διέρχεται από την οπή Α στη θέση Ο πρέπει να ανυψώσουμε το αντίστοιχο βάρος κατά (ΟΑ). Δηλαδή να δαπανήσουμε έργο όσο είναι η δυναμική του ενέργεια: $U_A=(OA)\cdot 1$. Αντίστοιχα για τα άλλα δύο ελατήρια έχουμε: $U_B=(OB)\cdot 1$ και $U_\Gamma=(O\Gamma)\cdot 1$.

Καταφέραμε έτσι να "προικίσουμε" τις αποστάσεις (ΟΑ), (ΟΒ) και (ΟΓ) με την έννοια της Δυναμικής Ενέργειας. Αν λοιπόν το άθροισμα των Δυναμικών Ενεργειών θέλουμε να είναι ελάχιστο, το σύστημα πρέπει να είναι σε ισορροπία.

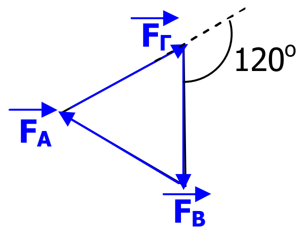
Για να συμβεί αυτό πρέπει οι τρεις δυνάμεις των τάσεων των ελατηρίων προστιθέμενες να δίνουν συνισταμένη μηδέν.




(Σχήμα 3)

Επειδή $F_\Gamma = F_B = F_A = B = 1$ το δυναμοπολύγωνο των τάσεων είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο (Σχήμα 4) και οι γωνίες

$A\hat{O}B=B\hat{O}\Gamma=\Gamma\hat{O}A=120^\circ$. Άρα το άθροισμα των αποστάσεων S=(ΟΑ)+(ΟΒ)+(ΟΓ) γίνεται ελάχιστο, όταν τα τμήματα (ΟΑ), (ΟΒ), (ΟΓ) ανά δύο σχηματίζουν γωνίες $120^\circ$.



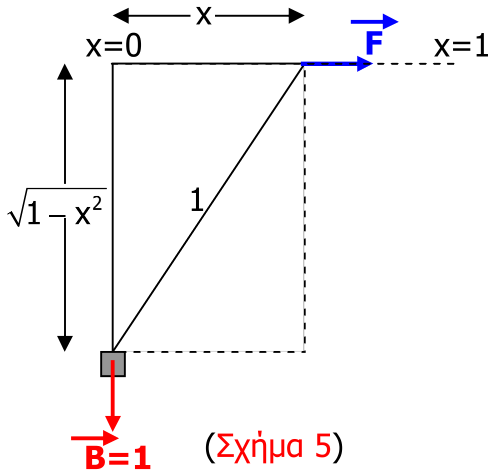

(Σχήμα 4)

## 2ο Πρόβλημα (Η "άσκοπη" ανύψωση ενός βάρους μπορεί να είναι και χρήσιμη)

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

## Απάντηση

Θεωρούμε ένα σώμα με μοναδιαίο βάρος (B=1), το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε κατακόρυφο οδηγό. Το σώμα έχει συνδεθεί με αβαρές νήμα μήκους $\ell=1$, το οποίο αρχικά είναι κατακόρυφο. Αρχίζουμε να κινούμε το άλλο άκρο του νήματος από την αρχική του θέση σε οριζόντια διεύθυνση με σταθερή ταχύτητα. Το σώμα ολισθαίνει προς τα πάνω κατά μήκους του κατακόρυφου οδηγού (Σχήμα 5).
Αν x είναι η οριζόντια μετατόπιση του πάνω άκρου του νήματος, καθώς αυτή μεταβάλλεται από την τιμή x=0 μέχρι την τιμή x=1, το έργο της δύναμης F που ασκούμε στο πάνω μέρος του νήματος είναι:



(Σχήμα 5)

$W_F=\int_0^1 F(x)dx \quad (1)$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε από την αρχική του θέση και μέχρι τη θέση που αυτό θα έχει ανέλθει κατά $x=\ell=1$:

$$\Sigma W=\Delta K \Rightarrow W_F-|W_B|=0 \Rightarrow W_F=W_B \overset{(1)}{\Rightarrow} \int_0^1 F(x)dx=1\cdot 1 \Rightarrow \int_0^1 F(x)dx=1 \quad (2).$$

Οι κάθετες στις διευθύνσεις των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{F}$ τέμνονται στο σημείο Ο. Το σώμα κατά την κίνησή του δε στρέφεται, άρα

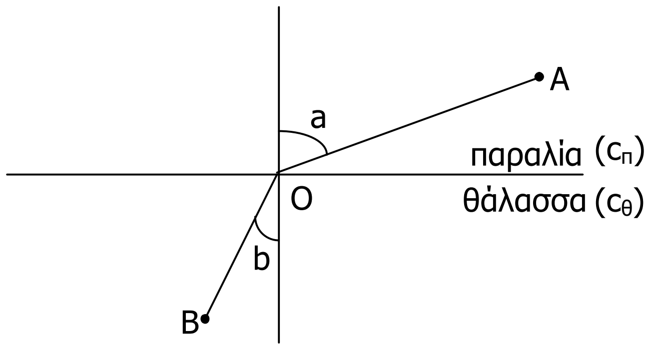
$$\Sigma\tau_{(O)}=0 \Rightarrow Bx-F\sqrt{1-x^2}=0 \Rightarrow F=\frac{Bx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{B=1}{\Rightarrow} F=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3).$$

Από (2) και (3) προκύπτει ότι: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=1$.

**<u>Σημείωση:</u>** Η τιμή x=1 δεν είναι εφικτή διότι τότε $F\to\infty$ και το ολοκλήρωμα είναι ακατάλληλο για υπολογισμό.

## 3ο Πρόβλημα (Ο Νόμος του Snell, η Αρχή του Fermat και ο ... ναυαγοσώστης)

Ένας ναυαγοσώστης που βρίσκεται στη θέση Α στην παραλία σπεύδει να σώσει έναν κολυμβητή που κινδυνεύει και βρίσκεται στη θάλασσα στη θέση Β. Ο ναυαγοσώστης τρέχει στην παραλία με ταχύτητα μέτρου $c_\pi$ και κολυμπάει με ταχύτητα μέτρου $c_\theta$. Αν θεωρήσουμε τον κολυμβητή ακίνητο στη θέση Β, ποια η διαδρομή ΑΟΒ που απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο για να φτάσει ο ναυαγοσώστης στον κολυμβητή;




## Ιστορική Αναδρομή

Ο **Ήρων ο Αλεξανδρινός** (10μ.Χ-70μ.Χ) μηχανικός και γεωμέτρης διατυπώνει τη θέση ότι το φως στον αέρα διαδίδεται μεταξύ δύο σημείων μετά από ανακλάσεις σε επίπεδους καθρέπτες ακολουθώντας τη διαδρομή με το μικρότερο μήκος.
Το 1621 ο Ολλανδός αστρονόμος και μαθηματικός **Willebrord Snell** αποδεικνύει τον ομώνυμο νόμο για τη διάθλαση του φωτός, τον οποίο δε δημοσίευσε όσο ήταν εν ζωή.

Αργότερα (1637) **ο Rene Descartes** εργαζόμενος ανεξάρτητα παράγει το νόμο:

$$\frac{1}{c_a}\eta\mu\theta_a = \frac{1}{c_b}\eta\mu\theta_b .$$

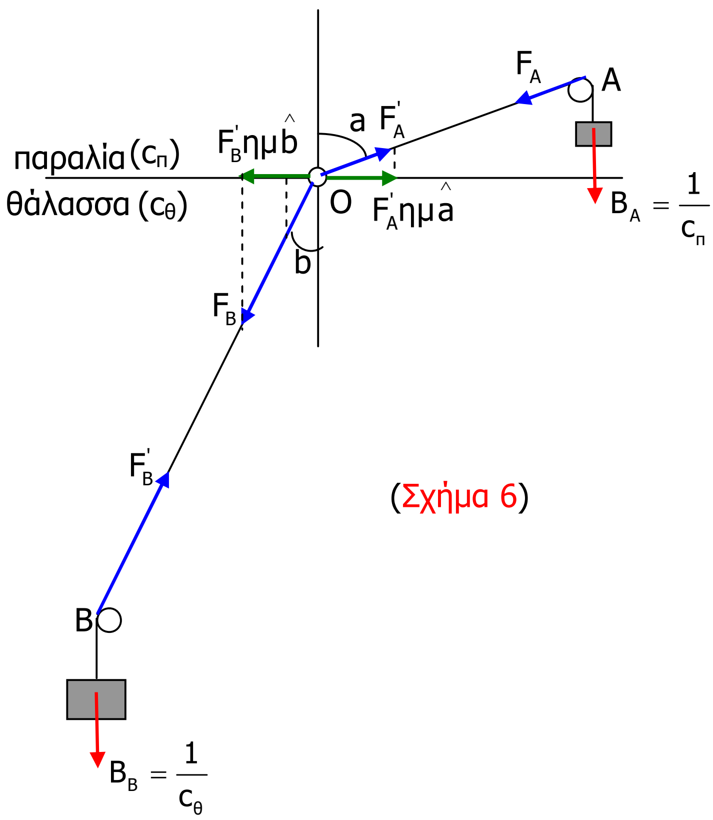
Το 1662 ο Γάλλος μαθηματικός **Pierre de Fermat** αποδεικνύει την ομώνυμη αρχή: το φως όταν ταξιδεύει μεταξύ δύο σημείων επιλέγει τη διαδρομή που απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο.

**Απάντηση**

Θεωρούμε έναν δακτύλιο που μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές κατά μήκος της ακτογραμμής και είναι συνδεδεμένος στο Α με ένα ελατήριο σταθερής τάσης του οποίου η τάση επιλέγουμε να είναι $\frac{1}{c_\pi}$, όσο και το βάρος του σώματος. Αντίστοιχα ο δακτύλιος είναι συνδεδεμένος και με το σημείο Β με ελατήριο σταθερής τάσης που η τάση του επιλέγουμε να είναι $\frac{1}{c_\theta}$, όσο και το βάρος του σώματος (Σχήμα 6).

Η Δυναμική Ενέργεια των ελατηρίων σταθερής τάσης όπως έχουμε δει ισούται με το μήκος τους επί την τάση που τους ασκείται. Άρα $U = \frac{(AO)\cdot 1}{c_\pi} + \frac{(OB)\cdot 1}{c_\theta}$. Η παράσταση αυτή είναι ίση με το χρόνο που χρειάζεται ο ναυαγοσώστης για να διανύσει τη διαδρομή (ΑΟΒ).
Καταφέραμε να "προικίσουμε" το χρόνο με την έννοια της Δυναμικής Ενέργειας!!!
Για να είναι ελάχιστος ο χρόνος που θα κάνει ο ναυαγοσώστης για να διανύσει τη διαδρομή (ΑΟΒ), πρέπει να είναι ελάχιστη και η Δυναμική Ενέργεια.
Εφόσον το σύστημα δακτύλιος, ελατήρια σταθερής τάσης, σώματα ισορροπεί, κατά τη διεύθυνση της ακτογραμμής πρέπει να ισχύει:

$$F'_A \eta\mu\hat{a} = F'_B \eta\mu\hat{b} \Rightarrow \frac{1}{c_\pi}\eta\mu\hat{a} = \frac{1}{c_\theta}\eta\mu\hat{b}.$$




(Σχήμα 6)

Η τελευταία σχέση αποτελεί το Νόμο του Snell και οδηγηθήκαμε σε αυτήν "μεταφράζοντας" το Νόμο του Snell ως: Οι δυνάμεις στον δακτύλιο στη διεύθυνση της ακτογραμμής είναι σε ισορροπία.
Άρα ο ναυαγοσώστης για να φτάσει στον κολυμβητή στον ελάχιστο χρόνο πρέπει να τρέξει και να κολυμπήσει με τέτοιο τρόπο, ώστε οι γωνίες $\hat{a}$ και $\hat{b}$ που σχηματίζει η τροχιά του με την κάθετη στην ακτογραμμή, να ικανοποιούν το Νόμο του Snell.

**Σχόλια**

Είναι παλιά η συζήτηση  για το εάν τα μαθηματικά υπηρετούν τις ανάγκες της Φυσικής ή οι δύο αυτές επιστήμες είναι συνυφασμένες τόσο στενά μεταξύ τους, που υποφέρουν εάν τις διαχωρίσουμε. Ο V. Arnold είπε: «Τα Μαθηματικά είναι ένας κλάδος της Θεωρητικής Φυσικής όπου τα πειράματα είναι φθηνά».

Οι ιδέες για την παρούσα ανάρτηση προέρχονται από το βιβλίο "**The Mathematical Mechanic**",του **Mark Levi**, εκδόσεις Princeton. Οι απαραίτητες προσαρμογές, η επεξεργασία και η μετάφραση έγιναν από τον γράφοντα. Μένει να αποδειχτεί αν οι φίλοι και συνάδελφοι θα συμμεριστούν τον ενθουσιασμό που με οδήγησε σε αυτήν την ανάρτηση.

**Ξ. Στεργιάδης**