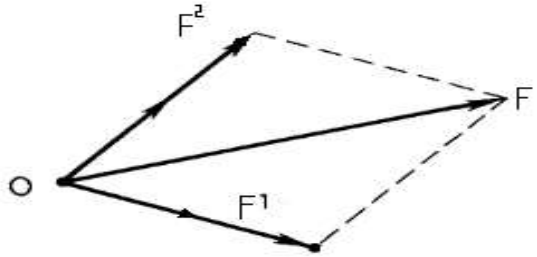
ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΕΡΓΑ ΤΩΝ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

Θεωρούμε τις δύο δυνάμεις F^1 και F^2 που ασκούνται ταυτόχρονα στο ίδιο υλικό σημείο Ο (που το θεωρούμε αρχικά ακίνητο). Έστω ότι F είναι η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων. Παρατηρήστε ότι οι (συνιστώσες) της F ονομάζονται F^1 και F^2 αντί για F_1 και F_2. Αυτό δεν είναι τυχαίο. Είναι οι ανταλλοίωτες (contravariant) συνιστώσες της δύναμης, που θα τις χρειασθούμε παρακάτω για τον ορισμό του έργου. Οι δύο διευθύνσεις των F^1 και F^2 θεωρούμε ότι σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία θ (τυχαία).



Στη γενική λοιπόν περίπτωση που οι δυνάμεις είναι πλάγιες , βρίσκει κανεί ότι το έργο της συνισταμένης δεν είναι ίσο με το άθροισμα των

επί μέρους έργων των δύο συνιστωσών. **Για να μην παρεξηγηθώ**: εννοώ αν περιορισθούμε μόνο στο γινόμενο κάθε συνιστώσας επί την αντίστοιχη μετατόπιση, και δεν συμπεριλάβουμε τα δύο επιπλέον έργα που προέρχονται από την προβολή κάθε μιας από τις δύο συνιστώσες στην διεύθυνση της άλλης. Δηλαδή αν βιαστικά και επιπόλαια δεν συμπεριλάβουμε όλα τα έργα. Γιατί σε καμμια περίπτωση δεν μπορεί να έχουμε δημιουργία ή "καταστροφή "έργου.. Με το πρόβλημα αυτό έχουν ήδη ασχοληθεί ο Αντρέας Κασσέτας και ο Δημήτρης Τσαούσης:

http://users.sch.gr/kassetas/yPrincipioIndipendenza5.htm

http://users.sch.gr/dtsaousis/arthra/sinergatiko.doc

προσφέροντας και οι δύο εξαιρετικές ερμηνείες του «προβλήματος» που ανακύπτει. (Και μάλιστα με απόλυτα παιδαγωγικό και κατανοητό τρόπο). Και βέβαια ίσως να έχουν ασχοληθεί με το θέμα και άλλοι συνάδελφοι.

Ας προσθέσω και εγώ μια διαφορετική προσέγγιση . Θα χρειασθούμε λίγα μαθηματικά από το χώρο των τανυστών, αλλά πιστεύω ότι στο τέλος θα «αποζημιωθούμε». Το έργο είναι ένα μονόμετρο μέγεθος (scalar, άρα αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς συντεταγμένων) που ορίζεται με το ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ γινόμενο δύο διανυσμάτων. Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να ορισθεί μέσω της μετρικής, όταν μιλάμε για πλάγιο σύστημα αξόνων.

(Δείτε και την προηγούμενη εργασία- ανάρτησή μου: *Η «προσθετική ιδιότητα» της κινητικής ενέργειας (ΙΙ).*

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$A.B = A_a B^a = g_{ab} A^b B^a \qquad (1)$$

Όπου:

g_{ab}, είναι ο μετρικός τανυστής , ο οποίος για την περίπτωση πλάγιων αξόνων που σχηματίζουν γωνία θ, είναι:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1.g_1 & g_1.g_2 \\ g_2.g_1 & g_2.g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \qquad (2),$$

όπου θεωρούμε τα g_1 και g_2 , σαν τα μοναδιαία διανύσματα πάνω στους δύο (πλάγιους) άξονες, και με $g_1.g_1$, $g_1.g_2$, κλπ. εννοούμε το εσωτερικό τους γινόμενο.

A_α , είναι οι «συναλλοίωτες» (covariant) συνιστώσες του διανύσματος Α.

Το στοιχειώδες λοιπόν έργο ορίζεται:

$$dW = F_a dx^a \qquad (3),$$

όπου και πάλι είναι σε ισχύ η σύμβαση άθροισης του Einstein (διπλός δείκτης πάνω και κάτω σημαίνει άθροιση σε όλες τις δυνατές τιμές του, οι οποίες στην περίπτωσή μας είναι δύο, μια και δουλεύουμε στο επίπεδο). Από τον ορισμό λοιπόν έχουμε:

$$dW = F_a dx^a = g_{ab} F^b dx^a \qquad (4),$$

οπότε πλέον καταλαβαίνουμε γιατί αρχικά αναφερθήκαμε στις ανταλλοίωτες συνιστώσες της δύναμης.

Θα έχουμε λοιπόν:

$$dW = F_a dx^a = g_{ab} F^b dx^a \Rightarrow$$

$$dW = g_{11} F^1 dx^1 + g_{12} F^2 dx^1 + g_{21} F^1 dx^2 + g_{22} F^2 dx^2$$

ή

$$dW = F^1 dx^1 + \cos\theta F^2 dx^1 + \cos\theta F^1 dx^2 + F^2 dx^2$$

ή

$$dW = dW_1 + \cos\theta F^2 dx^1 + \cos\theta F^1 dx^2 + dW_2 , \qquad (5)$$

όπου με dW_1 και dW_2 , τα έργα όπως τα υπολογίζαμε παλιά (χωρίς την αναφορά σε συναλλοίωτες και ανταλλοίωτες συνιστώσες).

Η (5) μπορεί να γραφεί:

$$dW = dW_1 + dW_2 + \cos\theta (F^2 dx^1 + F^1 dx^2) \qquad (6).$$

Από την (6) είναι φανερό ότι για $\theta=90^0$, έχουμε:

$$dW = dW_1 + dW_2$$

THE EINSTEIN SUMMATION CONVENTION

Η σύμβαση άθροισης του Einstein (*Einstein's summation con-vention)* είναι ένας γρήγορος τρόπος για να γράφει κανείς αθροίσματα. Όταν ο ίδιος δείκτης εμφανίζεται δύο φορές (τη μια σαν πάνω και την άλλη σαν κάτω δείκτης) σε μια έφραση, τότε αυτό σημαίνει άθροιση σε όλες τις δυνατές τιμές που παίρνει ο δείκτης.

Για παράδειγμα:

(τρόπος γραφής χωρίς τη σύμβαση Einstein):

$$\sum_{i=1}^{3} A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$

(τρόπος γραφής με τη σύμβαση Einstein):

$$A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 ,$$

Δηλαδή:

$$A_i B^i \leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} A_i B^i$$

ΒΟΥΒΟΙ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΟΙ ΔΕΙΚΤΕΣ

Ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης, με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, λέγεται «βουβός δείκτης» (dummy index) και μπορεί να αντικατασταθεί με κάποιο άλλο γράμμα, αν αυτό βολεύει. Αντίθετα ένας μη επαναλαβανόμενος δείκτης χαρακτηρίζεται σαν ελεύθερος (free) και πρέπει να εμφανίζεται και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης.

Για παράδειγμα στην εξίσωση:

$$S^a T_{ab} = S^c T_{cb} \quad ,$$

οι δείκτες a και c είναι βουβοί (άθροιση), ενώ ο δείκτης b είναι ελεύθερος. Αν αλλάξετε το βουβό δείκτη c στο δεύτερο μέλος και τον «κάνετε» a, φαίνεται αμέσως η ισότητα των δύο μελών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παραπάνω ανάλυση που επιχειρήσαμε καταλήγουμε στο συμπέρασμα που καταλήγει και ο συνάδελφος Ανδρέας Κασσέτας, ο οποίος μάλιστα, χρησιμοποιώντας το γνωστό θεώρημα του συνημιτόνου, καταλήγει στο συμπέρασμα πιο λιτά, πιο κομψά και σίγουρα πιο κατανοητά (χωρίς τη χρήση «περίεργων» μαθηματικών από τον κόσμο των τανυστών). Η μέθοδος όμως που περιγράφηκε παραπάνω (ομολογουμένως πιο «επίπονη») μπορεί να γενικευθεί εύκολα σε περισσότερες διαστάσεις καθώς επίσης και σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και εκεί, κατά τη γνώμη μου βρίσκεται η όποια αξία της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A Brief on Tensor Analysis, 2nd Edition, James G. Simmonds, Springer-Verlag 1994

2. Relativity Demystified, David Mc Mahon, McGraw-Hill 2006

3. Tensor Calculus, David C. Kay, Schaum's Outline Series, 1988

4. Differential Geometry in Physics, Gabriel Lugo. Κατεβαίνει με κλικ στο link: http://people.uncw.edu/lugo/courses/diffgeom/dg1.pdf

5. Classical Mechanics, Third Edition, Goldstein, Poole & Safko, Pearson 2002

6. Classical Dynamics, Marion & Thornton,4th Edition, Harcourt Brace & Company , 1995

7. Η προσθετική ιδιότητα της ενέργειας, του συναδέλφου Δημήτρη Τσαούση (PhD.)

8. http://users.sch.gr/kassetas/yPrincipioIndipendenza5.htm, του συνάδελφου Ανδρέα Κασσέτα.

9. Η «προσθετική ιδιότητα» της κινητικής ενέργειας (ΙΙ), του Γιάννη Φιορεντίνου

ΑΘΗΝΑ
ΜΑΡΤΗΣ 2011

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΦΥΣΙΚΟΣ
MSc. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ