

Ροπή ν-αδας

N. Παναγιωτίδης, υπεύθυνος ΕΚΦΕ Ιωαννίνων

Όταν ζεύγος δυνάμεων ασκείται σ' ένα σώμα, έχει την εξής χαρακτηριστική ιδιότητα: η ροπή που προκαλεί στο σώμα χρειάζεται ένα σημείο αναφοράς A για να υπολογιστεί, όμως το διάνυσμα της ροπής που προκύπτει με βάση αυτό το σημείο αναφοράς είναι το ίδιο μ' αυτό που θα προέκυπτε αν αντί του A θεωρούσαμε σαν σημείο αναφοράς κάποιο άλλο. Ή με άλλα λόγια: η ροπή του ζεύγους δεν εξαρτάται από το σημείο αναφοράς. Όμως, επειδή συνήθως η ροπή ενός συστήματος δυνάμεων υπολογίζεται από τον τύπο $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, για να γίνει ο υπολογισμός απαιτείται κάποιο σημείο αναφοράς.

Η ιδιότητα αυτή δεν περιορίζεται στο ζεύγος δυνάμεων. Την έχει κάθε σύστημα δυνάμεων όταν εκπληρούται η συνθήκη:

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Αν δεν κάνω λάθος το βιβλίο της Γ' Λυκείου γράφει ότι ένα τέτοιο σύστημα δυνάμεων αναλύεται τελικά σε ζεύγος. Αλλά, αν φανταστούμε μια κυκλική στεφάνη και στα σημεία που αντιστοιχούν σε τόξα 0°, 120° και 240° δρουν εφαπτομενικά και κατά τη δεξιόστροφη φορά τρεις δυνάμεις ίσου μέτρου, τότε ισχύει μεν το $\sum \vec{F}_i = 0$, αλλά δεν είναι απαραίτητο να μετατρέψουμε τις 3 δυνάμεις σε ζεύγος ώστε να βρούμε τη ροπή του συστήματος.

Με άλλα λόγια: Όταν για ένα σύστημα δυνάμεων ισχύει η συνθήκη $\sum \vec{F}_i = 0$, το σύστημα μπορεί να έχει ροπή διάφορη του μηδενός, η οποία υπολογίζεται με τη βοήθεια κάποιου σημείου αναφοράς A από τη σχέση $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ και η οποία δεν εξαρτάται από το A.

Δηλαδή, όταν μιλάμε για ροπή ενός συστήματος δυνάμεων δεν πρόκειται κατ' ανάγκη για ροπή ζεύγους. Μπορεί να πρόκειται για ροπή τριάδας, τετράδας δυνάμεων κλπ. Αυτές οι ν-άδες δυνάμεων δεν ανάγονται κατ' ανάγκη σε ζεύγος αλλά και δεν είναι ανάγκη να αναχθούν αφού η ροπή που δημιουργούν υπολογίζεται από την παραπάνω σχέση.

Ας δώσουμε παρακάτω την απόδειξη του γεγονότος ότι όταν ισχύει η $\sum \vec{F}_i = 0$, η ροπή δεν εξαρτάται από το σημείο αναφοράς.

Έστω A σημείο αναφοράς και $\vec{r}_i, i = 1, \dots, n$ τα διανύσματα θέσεως ως προς A των σημείων στα οποία ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_i, i = 1, \dots, n$. Έστω $\vec{M}$ το διάνυσμα της ροπής αυτών των δυνάμεων. Σύμφωνα με τον ορισμό:

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Έστω B ένα άλλο σημείο αναφοράς. Ισχύει:

$$\vec{r}_i = \vec{AB} + \vec{r}'_i,$$

όπου $\vec{r}'_i$ το διάνυσμα θέσης του σημείου i ως προς το B. Ας συμβολίσουμε με $\vec{M}'$ τη ροπή ως προς το B:

$$\vec{M}' = \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \sum (\vec{r}_i - \vec{AB}) \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum \vec{AB} \times \vec{F}_i = \vec{M} - \vec{AB} \times \sum \vec{F}_i = \vec{M},$$

Που αποδεικνύει το ζητούμενο.