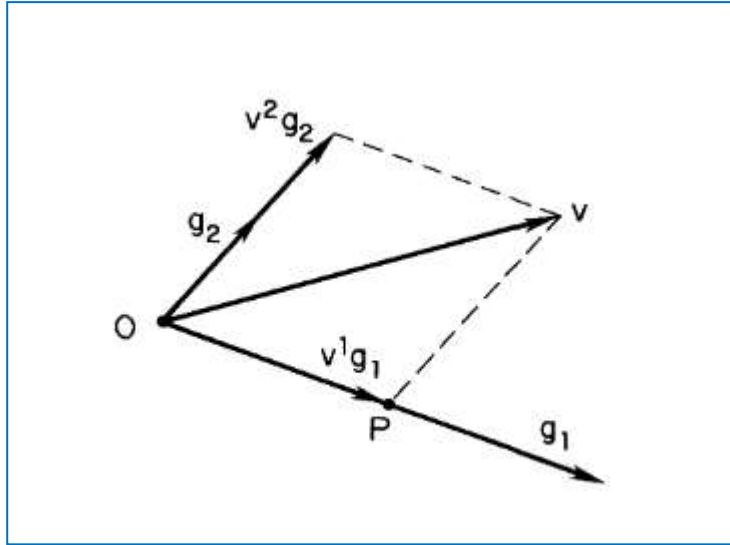




Θεωρούμε τους άξονες του παραπάνω σχήματος που συνιστούν ένα πλάγιο σύστημα αξόνων. Αναλύουμε την ταχύτητα v στους δύο αυτούς άξονες και παίρνουμε τις (Contravariant) συνιστώσες v^1 και v^2 αντίστοιχα. Τις δύο αυτές συνιστώσες συμβολίζουμε με v^a , όπου το a παίρνει τις τιμές 1 και 2. Η μετρική των δύο αξόνων που επιλέξαμε, περιγράφεται από τον μετρικό τανυστή, στην περίπτωση μας συμμετρικό πίνακα 2×2 :

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \cdot g_1 & g_1 \cdot g_2 \\ g_2 \cdot g_1 & g_2 \cdot g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Προκειμένου να βρούμε την κινητική ενέργεια του σώματος θα χρειασθούμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{v} \cdot \vec{v}$. Στην περίπτωση μας όμως και επειδή η μετρική δεν είναι Ευκλείδεια (δεν ισχύει το Πυθαγόρειο, αφού έχουμε μή μηδενικά τα μη διαγώνια στοιχεία του μετρικού τανυστή), για να βρούμε το εν λόγω εσωτερικό γινόμενο θα χρειασθούμε και τις covariant συνιστώσες, τις v_a . Και τότε θα έχουμε:

$$v^2 = v_a v^a \quad (2).$$

Όμως βρίσκουμε τις covariant συνιστώσες, αν ξέρουμε τις contravariant, δηλαδή «κατεβάζουμε» δείκτες μέσω της μετρικής.

Δηλαδή:

$$v_a = g_{ab} v^b \quad (3)$$

όπου θεωρούμε την σύμβαση άθροισης του Einstein (Einstein's summation convention), σύμφωνα με την οποία επαναλαμβανόμενος δείκτης (στη (2) το b), ονομάζεται βουβός (Dummy index) και σημαίνει άθροιση.

Δηλαδή:

$$\text{π.χ: } v_1 = g_{11} v^1 + g_{12} v^2 = v^1 + \cos \theta v^2 \quad (4)$$

Έτσι λοιπόν το εσωτερικό γινόμενο γράφεται:

$$v^2 = v_a v^a = g_{ab} v^a v^b \quad (5),$$

ή

$$\begin{aligned} v^2 &= v_a v^a = g_{ab} v^a v^b = \\ &= g_{11} (v^1)^2 + g_{12} v^1 v^2 + g_{21} v^2 v^1 + g_{22} (v^2)^2 \end{aligned}$$

ή

$$v^2 = (v^1)^2 + 2 \cos \theta v^1 v^2 + (v^2)^2 \quad (6).$$

Οπότε τελικά:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2 = \\ &= \frac{1}{2} m [(v^1)^2 + (v^2)^2 + 2 \cos \theta v^1 v^2] \end{aligned} \quad (7)$$

Τώρα πχ για $\theta=60^\circ$,

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{και η (7) γράφεται:}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m [(v^1)^2 + (v^2)^2 + v^1 v^2] \quad (8)$$

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΦΥΣΙΚΟΣ

MSc. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ