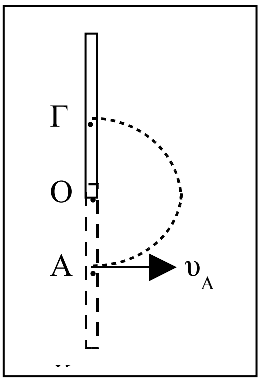
ΑΝΑΚΥΚΛΩΣΗ

Α. Ομογενή στερεά ανακυκλούμενα γύρω από σταθερό άξονα που τέμνει το στερεό.

Α.1. Ράβδος ΟΚ αμελητέου πάχους μάζας Μ και μήκους L στερεώνεται με πείρο στο άκρο Ο ώστε να μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από αυτόν. Να βρεθεί η ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα ω που πρέπει να προσδώσουμε στην ράβδο όταν αυτή βρίσκεται στην ευσταθή ισορροπία της (σχ Α.1.1.) ώστε να διαγράψει πλήρεις περιστροφές. (Δίνεται g η επιτάχυνση της βαρύτητας).

Για να κάνει η ράβδος του σχήματος ανακύκλωση πρέπει το κέντρο μάζας Α να φθάσει στη θέση Γ με ταχύτητα $\boxed{\upsilon_\Gamma \ge 0}$ δηλαδή **Α**ναγκαία και **Ι**κανή **Σ**υνθήκη ανακύκλωσης είναι : $\boxed{\omega_\Gamma \ge 0}$ ή $\boxed{K_\Gamma \ge 0}$

Εφαρμόζω ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης.



$$U_A + K_A = U_\Gamma + K_\Gamma \Rightarrow$$

$$U_A - U_\Gamma + K_A = K_\Gamma \ge 0 \Rightarrow$$

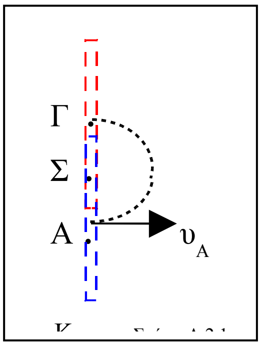
$$M g(h_A - h_\Gamma) + \tfrac{1}{2} \cdot I^o \cdot \omega_A^2 \ge 0 \Rightarrow$$

$$M g(-\ell) + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{M\ell^2}{3} \cdot \omega_A^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{M\ell^2}{6} \cdot \omega_A^2 \ge Mg\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_A^2 \ge \frac{6g}{\ell} \Rightarrow \boxed{\omega_A \ge \sqrt{\frac{6g}{\ell}}}$$

* Θεωρήσαμε εύκολη την εύρεση της ροπής $I^o = \dfrac{M\ell^2}{3}$

Α.2. Στη ράβδο του προηγούμενου προβλήματος να βρεθεί σε ποιο άλλο σημείο Σ μπορούμε να στερεώσουμε με πείρο ώστε η ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα ω_A που απαιτείται για ανακύκλωση να είναι ίδια;



Έστω d η απόσταση -από το κέντρο μάζας Α- του σημείου Σ γύρω από το οποίο επιτυγχάνεται ανακύκλωση αν προσδώσουμε στη ράβδο που αρχικά ισορροπούσε ευσταθώς γωνιακή ταχύτητα $\omega_A \ge \sqrt{\dfrac{6g}{\ell}}$. Το κέντρο μάζας θα διαγράψει τροχιά διαμέτρου 2d ενώ η ροπή Αδρανείας θα είναι :

$I^\Sigma = \dfrac{M\ell^2}{12} + Md^2$. Οπότε :

$$U_A + K_A = U_\Gamma + K_\Gamma \Rightarrow$$

$$U_A - U_\Gamma + K_A = K_\Gamma \ge 0 \Rightarrow$$

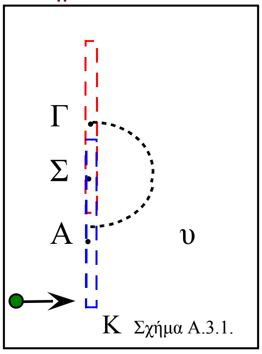
$$-M g 2d + \tfrac{1}{2} \cdot I^\Sigma \cdot \omega_A^2 \ge 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \omega_A \ge \sqrt{\frac{48dg}{\ell^2 + 12d^2}}$$

$$\text{Αλλά } \omega_A \ge \sqrt{\frac{6g}{\ell}} \text{ Οπότε } \frac{48dg}{\ell^2 + 12d^2} = \frac{6g}{\ell} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ell^2 - 8d\ell + 12d^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow d = \ell/2 \text{ ή } \boxed{d = \ell/6}$$

Όπως θα δούμε στο επόμενο πρόβλημα το σημείο Σ (που χωρίζει τη ράβδο σε $\ell/3$ και $2\,\ell/3$)είναι ένα προνομιακό σημείο στήριξης.

Α.3. Ράβδος ΟΚ αμελητέου πάχους μάζας Μ=4m και μήκους L κρέμεται από πείρο σε σημείο Σ το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $d={}^{L}\!/_{6}$ από το κέντρο μάζας της και ισορροπεί. Βολίδα αμελητέων διαστάσεων με μάζα m κτυπά με οριζόντια ταχύτητα στο άκρο Κ την ράβδο και αμέσως μετά την κρούση ακινητοποιείται. Η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον πείρο Σ και ανακυκλώνεται οριακά φτάνοντας στην ανώτερη θέση της με μηδενική ταχύτητα.



Σχήμα Α.3.1.

Α) Να βρεθεί η Ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς το Σ.

Β) Θεωρώντας την διάρκεια της κρούσης πολύ μικρή ώστε η Ράβδος κατά τη διάρκεια της κρούσης να θεωρείται κατακόρυφη, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής για το σύστημα ράβδος-βολίδα (αφού όλες οι εξωτερικές δυνάμεις είναι κεντρικές) και να υπολογίσουμε την ταχύτητα της βολίδας. (u=;)

Γ) Δείξτε ότι κατά την κρούση ισχύει η Αρχή της Διατήρησης της Ορμής. Να δικαιολογήσετε αν η Αρχή αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε περίπτωση κρούσης βολίδας με ράβδο στερεωμένης με πείρο.

Δ) Δείξτε ότι κατά την κρούση δεν υπήρξε απώλεια Ενέργειας. Να δικαιολογήσετε αν αυτό μπορεί να ισχύει σε κάθε περίπτωση κρούσης τελείως ελαστικής βολίδας-ράβδου στερεωμένης με πείρο.

Α) $I^{\Sigma} = \dfrac{ML^2}{12} + Md^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{I^{\Sigma} = \dfrac{ML^2}{9}}$

Β) Όπως δείξαμε προηγουμένως εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ μετά την κρούση μεταξύ κατώτερης και ανώτερης θέσης: $\boxed{\omega_A \geq \sqrt{\dfrac{6g}{L}}}$

Αλλά κατά την κρούση η ΑΔΣ δίνει : $mu\dfrac{2L}{3} + 0 = 0 + \dfrac{4mL^2}{9}\omega \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{\dfrac{8Lg}{3}}}$

Γ) $\left|\overrightarrow{\Delta p}\right| = 4m\omega\dfrac{L}{6} - mu \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{\Delta p}\right| = 0}$ Ισχύει μόνο στη περίπτωση αυτή (ΑΣ=$d={}^{L}\!/_{6}$) γιατί κατά την κρούση η εξωτερική δύναμη από τον πείρο στη Ράβδο δεν έχει οριζόντια συνιστώσα . Στη Ράβδο η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται από τον πείρο είναι η δύναμη στήριξης F_N κατακόρυφα προς τα πάνω. ($\Sigma F = \Sigma F_y = F_N - 4mg \neq 0$ ίση με την απαιτούμενη κεντρομόλο). Απόδειξη: Έστω κατά την κρούση κάποια στιγμή t κατά την οποία η δύναμη από τη βολίδα στη ράβδο είναι F. Η δύναμη αυτή τείνει να προσδώσει στη ράβδο (αν δεν υπήρχε ο πείρος) μεταφορική επιτάχυνση (στη κατεύθυνση της F) με μέτρο $a_{cm} = \dfrac{F}{4m}$, ενώ η ροπή της τείνει να προσδώσει στη ράβδο (αν δεν υπήρχε ο πείρος) γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \dfrac{F\cdot {}^{L}\!/_{2}}{4m\,{}^{L^2}\!/_{12}}$ και το σημείο Σ θα έτεινε να προσλάβει οριζόντια επιτάχυνση (αν δεν υπήρχε ο πείρος) $a_{\Sigma} = a_{cm} - \alpha\cdot {}^{L}\!/_{6}$ =…=0. Αφού όμως το σημείο Σ τείνει να επιταχυνθεί μόνο σε κατακόρυφη κατεύθυνση η αντίδραση του πείρου που συγκρατεί τη ράβδο θα έχει κατακόρυφη κατεύθυνση. Αυτό ισχύει μόνο για το σημείο Σ.

Δ) $\Delta K = {}^{1}\!/_{2}\cdot\dfrac{4mL^2}{9}\omega^2 - {}^{1}\!/_{2}\cdot mu^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{\Delta K = 0}$. Ισχύει μόνο στη περίπτωση που ο πείρος είναι στο Σ για τον ίδιο λόγο που αναλύθηκε και στο προηγούμενο ερώτημα.

Α.4. Ομογενής δίσκος μάζας m και ακτίνας R, στερεώνεται με οριζόντιο καρφί σε σημείο Σ που απέχει απόσταση d=$^{R}\!/_{2}$ από το κέντρο μάζας της και ισορροπεί κατακόρυφος. Να βρεθεί η ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα που πρέπει να αποκτήσει ο δίσκος ώστε να ανακυκλωθεί χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το καρφί. [Απάντηση: $\omega \geq \sqrt{\frac{8g}{3R}}$]

ΓΚΕΝΕΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
mitsosgk(at)gmail(dot)com