

ΘΕΩΡΗΜΑ EULER ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

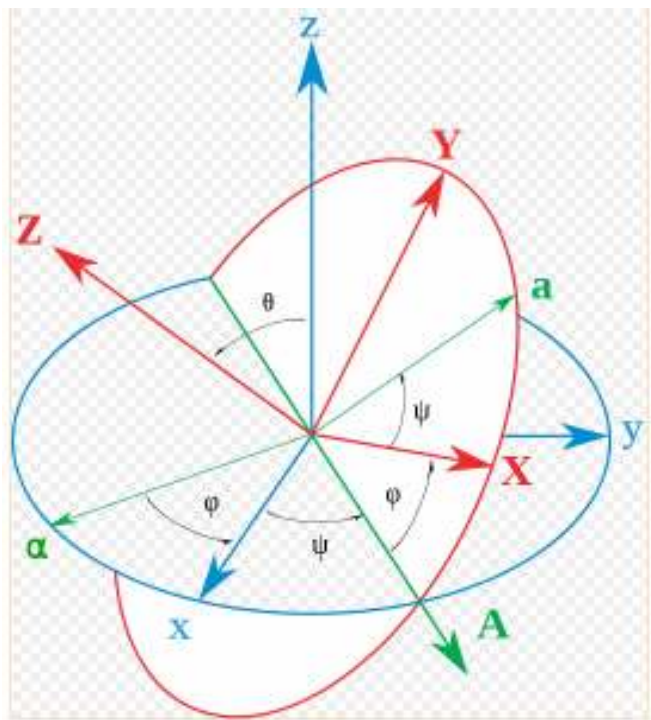
Ο Leonard Euler παρουσιάζει στην ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης στις 9 Οκτωβρίου 1775 το ομώνυμο θεώρημα το οποίο δημοσιεύεται για πρώτη φορά στο "Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 20, pages 189-207" το 1776.

Το θεώρημα στην αρχική του διατύπωση «Quimodocunque sphaera circa centrum suum conuertatur, semper assignari potest diameter, cuius direction in situ translato conueniat cum situ initiali».

Στη σημερινή διεθνή γλώσσα: «When a sphere is moved around its centre it is always possible to find a diameter whose direction in the displaced position is the same as in the initial position».

Αντίστοιχα: «Όταν μια σφαίρα κινείται γύρω από το κέντρο της είναι πάντοτε δυνατό να βρεθεί μία διάμετρος της οποίας η διεύθυνση στη μετατοπισμένη θέση είναι ίδια με αυτήν στην αρχική θέση».

Στο **σχήμα 1** φαίνεται η κατασκευή του θεωρήματος για μια στρεφόμενη σφαίρα της οποίας οι γωνίες Euler είναι ψ , θ , ϕ . Το μπλε σύστημα αναφοράς είναι συνδεδεμένο με την αρχικά ακίνητη σφαίρα. Το κόκκινο σύστημα αναφοράς με την περιστρεφόμενη σφαίρα. Η γραμμή τομής καθορίζει το σημείο A του θεωρήματος. Τα τόξα Aa και Aa πρέπει να είναι ίσα.



(Σχήμα 1)

Στη γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος ο Euler θεωρεί έναν αρχικό μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας όταν αυτή έχει μεταφερθεί λόγω της κίνησης. Αυτοί οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία από τα οποία επιλέγουμε το ένα ας πούμε το A. Αυτό το σημείο βρίσκεται στον αρχικό μέγιστο κύκλο κι έτσι μεταφέρεται σε ένα σημείο a στο δεύτερο κύκλο. Από

την άλλη μεριά το A βρίσκεται επίσης στο μετατοπισμένο κύκλο κι έτσι αντιστοιχεί σε ένα σημείο a στον αρχικό κύκλο. Να σημειώσουμε ότι το τόξο aA πρέπει να είναι ίσο με το τόξο Aa. Ο Euler χρειάζεται να κατασκευάσει ένα σημείο O στην επιφάνεια της σφαίρας που να είναι στην ίδια θέση σε σχέση με τα τόξα aA και Aa. Εάν ένα τέτοιο σημείο υπάρχει τότε:

- Είναι αναγκαίο οι αποστάσεις OA και Oa να είναι ίσες μεταξύ τους και τα τόξα Oa και OA πρέπει να είναι ίσα.
- Είναι αναγκαίο οι γωνίες OaA και OAa να είναι ίσες.

Τώρα ο Euler επισημαίνει ότι οι γωνίες OAa και OaA πρέπει να είναι ίσες διότι, εφόσον Oa και OA έχουν το ίδιο μήκος. Έτσι OAa και OaA είναι ίσες αποδεικνύοντας ότι το O βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας aAa. Για να παράξουμε μία πλήρη κατασκευή για το O εμείς χρειαζόμαστε μόνο να σημειώσουμε ότι το τόξο aO μπορεί επίσης να κατασκευαστεί έτσι ώστε AaO να είναι το ίδιο με aAO. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. Ο Euler παράγει μία επιπλέον κατασκευή η οποία θα μπορούσε να είναι ευκολότερη στην πράξη. Αυτός προτείνει δύο επίπεδα:

- Το συμμετρικό επίπεδο της γωνίας aAa (το οποίο διέρχεται από το κέντρο C της σφαίρας), και
- Το συμμετρικό επίπεδο ως προς το τόξο Aa (το οποίο επίσης διέρχεται από το C).

Πρόταση

Αυτά τα δύο επίπεδα τέμνονται σε μία διάμετρο. Αυτή είναι η διάμετρος την οποία αναζητούμε.

Απόδειξη

Ας ονομάσουμε O κάποιο από τα άκρα αυτής της διαμέτρου πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Εφόσον aA αντιστοιχιστεί με το Aa και τα τρίγωνα έχουν τις ίδιες γωνίες ακολούθως το τρίγωνο OaA έχει μεταφερθεί στο τρίγωνο OAa . Έτσι, το σημείο O έχει παραμείνει σταθερό κατά τη μετακίνηση.

Συνέπειες

Αυτό δείχνει ότι η περιστροφή μιας σφαίρας μπορεί να ιδωθεί σαν δύο διαδοχικές ανακλάσεις στα δύο επίπεδα που περιγράφηκαν προηγουμένως. Τα σημεία σε ένα κατοπτρικό επίπεδο είναι αμετάβλητα κατά την ανάκλαση και επομένως τα σημεία στην τομή τους (μία γραμμή που θα είναι ο **άξονας της περιστροφής**) θα είναι αμετάβλητα και για τις δύο ανακλάσεις και επομένως και για την περιστροφή. Η απόδειξη του θεωρήματος παρατέθηκε για λόγους επικύρωσης της επέκτασης του θεωρήματος στην κινηματική του στερεού σώματος καθώς και ιστορικούς.

Η επέκταση του παραπάνω θεωρήματος στην κινηματική του στερεού σώματος (rigid body) έχει να κάνει με το γεγονός ότι κάθε κίνηση η οποία αφήνει έναν άξονα αμετάβλητο είναι μία περιστροφή, αυτό επίσης αποδεικνύει ότι κάθε τυχαία σύνθεση περιστροφών είναι ισοδύναμη με μία μόνο περιστροφή γύρω από ένα νέο άξονα.

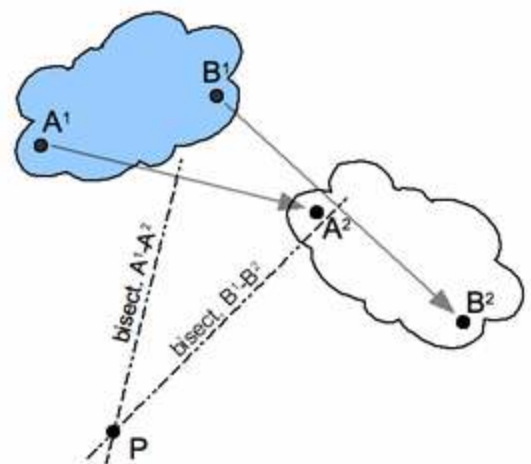
Το συμπέρασμα του θεωρήματος Euler για την περιστροφή ουσιαστικά αποδεικνύει ότι στον τρισδιάστατο χώρο κάθε μετατόπιση ενός στερεού σώματος που γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε ένα σημείο στο σώμα να παραμένει σταθερό είναι ισοδύναμη με μια απλή περιστροφή γύρω από ένα σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το σταθερό σημείο. Αυτός ο άξονας είναι γνωστός ως πόλος του Euler (Euler Pole) και στην ουσία οδήγησε στα πλαίσια της κινηματικής του στερεού σώματος στη σύλληψη της έννοιας του **στιγμιαίου άξονα περιστροφής.**

Στιγμιαίο κέντρο περιστροφής

Αν την έννοια του στιγμιαίου άξονα περιστροφής από τον τρισδιάστατο χώρο τη μεταφέρουμε σε ένα επίπεδο δύο διαστάσεων τότε για κάθε επίπεδο σχήμα που κινείται πάνω σ' αυτό το επίπεδο μπορούμε να ορίσουμε ως **στιγμιαίο κέντρο της περιστροφής** ένα σημείο του επιπέδου γύρω από το οποίο όλα τα άλλα σημεία του σχήματος **για μια στιγμή** στρέφονται. Αυτό καθαυτό το σημείο είναι το μοναδικό το οποίο δε μετακινείται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Ο προσδιορισμός του στιγμιαίου κέντρου της περιστροφής χρειάζεται να επιλέξουμε μόνο δύο σημεία στην επιφάνεια του σχήματος (**Σχήμα 2**) όπως τα σημεία A και B που στην αρχική θέση του σχήματος βρίσκονται στις θέσεις A^1 και B^1 και στην τελική θέση βρίσκονται στις θέσεις A^2 και B^2 αντίστοιχα. Είναι εμφανές ότι το σχήμα και μεταφέρθηκε και περιστράφηκε για να βρεθεί από την αρχική στην τελική του θέση.

Φέρουμε τη μεσοκάθετο της ευθείας $A^1 - A^2$. Κάθε σημείο της μεσοκάθετου μπορεί να είναι το κέντρο



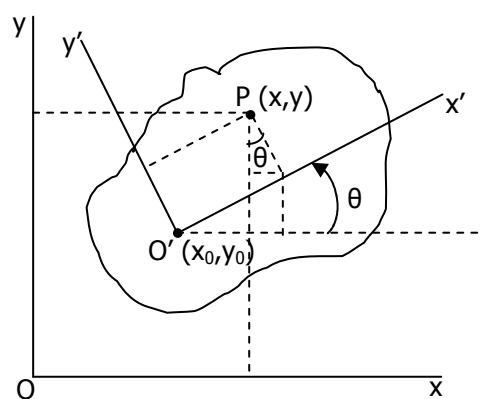
(Σχήμα 2)

ενός κύκλου στην περιφέρεια του οποίου βρίσκονται τα σημεία A^1 και A^2 . Αντίστοιχα κάθε σημείο της μεσοκάθετου της ευθείας $B^1 - B^2$ μπορεί να είναι το κέντρο ενός κύκλου στην περιφέρεια του οποίου βρίσκονται τα σημεία B^1 και B^2 . Εκεί όπου τέμνονται οι δύο μεσοκάθετοι είναι ένα σημείο το οποίο δεν κινείται και είναι το κέντρο δύο ομόκεντρων κύκλων πάνω στους οποίους αυτά τα σημεία βρίσκονται. Αυτό το ένα σημείο είναι το **Στιγμιαίο κέντρο περιστροφής P** γι' αυτές τις δύο θέσεις.

Ακραίες περιπτώσεις είναι αυτές στις οποίες όταν το επίπεδο σχήμα υπόκειται **μόνο με μεταφορική κίνηση** το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής βρίσκεται στο άπειρο, μετακινούμενο κατά μήκος της ίδιας διεύθυνσης πάνω στην οποία το σχήμα κινείται, και όταν **δεν υπάρχει μεταφορική κίνηση** και όλα τα σημεία του επιπέδου σχήματος **μόνο** περιστρέφονται γύρω από ένα σημείο το οποίο δεν κινείται, τότε αυτό είναι το κέντρο της περιστροφής.

Προσδιορισμός στιγμιαίου κέντρου περιστροφής

Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα το οποίο κινείται παράλληλα ως προς ένα σταθερό επίπεδο. Πάντοτε θα υπάρχει ένα σημείο ιδιαίτερου ενδιαφέροντος που επειδή στιγμιαία θα είναι ακίνητο θα αποτελεί το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής ως προς το ακίνητο σύστημα συντεταγμένων Oxy . Στο **Σχήμα 3** θεωρούμε ότι το στερεό σώμα κινείται στο επίπεδο xy . Επιλέγοντας κάποιο σημείο O' του σώματος ως αρχή ενός άλλου συστήματος συντεταγμένων $O'x'y'$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε τα επίπεδα xy και $x'y'$ να είναι παράλληλα και το σύστημα $O'x'y'$ άρρηκτα συνδεδεμένο με το σώμα και



(Σχήμα 3)

περιστρέφόμενο με αυτό. Στο **Σχήμα 3** το επίπεδο $x'y'$ περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού με αποτέλεσμα η γωνία θ μεταξύ του άξονα $O'x'$ και μιας οριζόντιας γραμμής στο επίπεδο $x'y'$ που διέρχεται από το O' , να είναι θετική.

Επιλέγουμε ένα σημείο P του σώματος που έχει συντεταγμένες x και y στο σύστημα Oxy . Οι συντεταγμένες x και y είναι συναρτήσεις του χρόνου, ενώ οι συντεταγμένες του σημείου P στο σύστημα $O'x'y'$, x' και y' είναι σταθερές. Οι σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων των δύο συστημάτων προκύπτουν από το **Σχήμα 3**. Θεωρώντας ότι οι συντεταγμένες του σημείου O' ως προς το σύστημα Oxy είναι x_0 και y_0 , για τις συντεταγμένες x και y του σημείου P έχουμε:

$$x = x_0 + x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad (1a)$$

$$y = y_0 + x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad (1\beta)$$

Οι αντίστοιχες αντίστροφες σχέσεις είναι:

$$x' = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta \quad (2a)$$

$$y' = -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta \quad (2\beta)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας του σημείου P υπολογίζονται από τις σχέσεις **1a** και **1β**:

$$u_x = u_{0x} - x' \frac{d\theta}{dt} \sin \theta - y' \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \Rightarrow u_x = u_{0x} - \omega(y - y_0) \quad (3), \text{ όπου } u_{0x} = \text{η ταχύτητα κατά τον}$$

Ox της κινούμενης ως προς το σύστημα Oxy αρχής O' και $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής του σώματος.

Αντίστοιχα έχουμε $u_y = u_{0y} + \omega(x - x_0)$ **(4)** για τη συνιστώσα της ταχύτητας του σημείου P κατά τον Oy όπου u_{0y} η ταχύτητα κατά τον Oy της κινούμενης ως προς το σύστημα Oxy αρχής O' .

Εάν το σημείο P είναι ακίνητο για τη θεωρούμενη χρονική στιγμή, τότε πρέπει $u_x = 0$ και $u_y = 0$. Τότε οι τιμές των x και y για το σημείο του σώματος που είναι ακίνητο στο σύστημα

Οxy τη δεδομένη χρονική στιγμή, από τις (3) και (4) είναι: $x=x_0 - \frac{u_{0y}}{\omega}$ (6) και $y=y_0 + \frac{u_{0x}}{\omega}$ (7).

Οι σχέσεις (6) και (7) δίνουν τις συντεταγμένες του σημείου του σώματος το οποίο είναι στιγμιαία ακίνητο ως προς το σύστημα Οxy. Ένα τέτοιο σημείο καλείται **Στιγμιαίο κέντρο περιστροφής για την ταχύτητα**. Από τις εξισώσεις (6) και (7) φαίνεται η μοναδικότητα αυτού του σημείου και είναι προφανές ότι ένα τέτοιο σημείο **δεν** είναι απαραίτητο να βρίσκεται πάνω στο σώμα αλλά μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο εξωτερικό του σώματος που βρίσκεται στο επίπεδο $x'y'$ (όπως στο παράδειγμα 2 της ολισθαίνουσας σφαίρας που ακολουθεί). Αυτή η τελευταία ιδιότητα αφορά και το σημείο αναφοράς O' (x_0, y_0) το οποίο δεν οφείλει να βρίσκεται στο σώμα. Τέλος, είναι φανερό ότι οι εξισώσεις (6) και (7) ισχύουν ανεξάρτητα από το εάν οι u_{0x} , u_{0y} και ω είναι σταθερές.

Κεντροειδές χώρου (Space Centrode) – Κεντροειδές σώματος (Body Centrode)

Η διαδρομή που ακολουθεί το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής ως προς το σύστημα Οxy ονομάζεται **κεντροειδές χώρου (Space Centrode)** και η διαδρομή που ακολουθεί το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής ως προς το σύστημα $O'x'y'$ ονομάζεται **κεντροειδές σώματος (Body Centrode)**.

Οι συντεταγμένες του κεντροειδούς σώματος μπορούν να βρεθούν με αντικατάσταση των x και y από τις (6) και (7) στις (2α) (2β). **Η μορφή της διαδρομής του κάθε κεντροειδούς εξαρτάται από το σημείο της παρατήρησης.**

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής ομογενούς σφαίρας ακτίνας R που κυλιέται χωρίς ολίσθηση πάνω σε οριζόντιο μη λείο επίπεδο.

Λύση

Στο **Σχήμα 4** θεωρούμε ότι ο άξονας Ox αντιστοιχεί στο επίπεδο κύλισης και η σφαίρα κυλιέται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου u_0 . Εφόσον η σφαίρα κυλιέται χωρίς ολίσθηση θα ισχύει $u_0 = \omega R$. Θεωρούμε

το κέντρο της σφαίρας ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων $O'x'y'$. Σύμφωνα με τις εξισώσεις (6) και (7) οι συντεταγμένες του στιγμιαίου κέντρου περιστροφής είναι $x=x_0$ (8)

και $y=y_0 - \frac{u_0}{R} = y_0 - R = 0$ (9), διότι $u_{0y}=0$. Από την εξίσωση (9), το **κεντροειδές χώρου** είναι ο

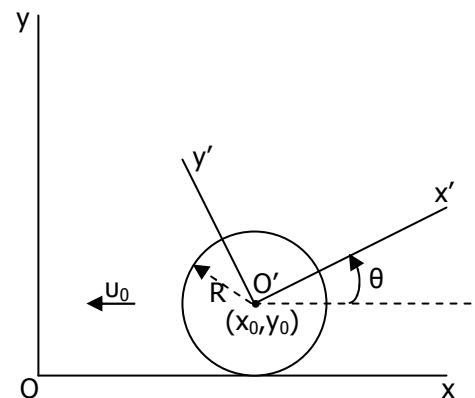
ίδιος ο άξονας x . Αντικαθιστώντας στις (2α) (2β) τις (8) και (9) προκύπτουν $x' = -R\eta\mu\theta$ και $y' = -R\sigma\upsilon\nu\theta$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και αθροίζουμε κατά μέλη τις τελευταίες σχέσεις και έχουμε

$x'^2 + y'^2 = R^2$. Αυτή είναι η εξίσωση ενός κύκλου ακτίνας R με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και επομένως το **κεντροειδές σώματος** είναι η περιφέρεια της ίδιας της σφαίρας.

Παράδειγμα 2

Για τη σφαίρα του προηγούμενου παραδείγματος θεωρούμε ότι τώρα κυλιέται με ολίσθηση. Θεωρούμε ότι το κέντρο της σφαίρας έχει ταχύτητα μέτρου u_0 προς τα αριστερά αλλά στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0 κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή αλλιώς κατά τη φορά όπου η γωνία θ ελαττώνεται. Να βρεθούν το κεντροειδές χώρου και το κεντροειδές σώματος.

Λύση



(Σχήμα 4)

Πάλι από τις εξισώσεις (6) και (7) προκύπτει ότι: $x=x_0$ (10) και $y=\frac{U_0}{\omega_0}+R$ (11) (τώρα δεν

ισχύει η σχέση $u_0=\omega_0 R$). Το **κεντροειδές χώρου** βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση $\frac{U_0}{\omega_0}+R$

πάνω από το σημείο επαφής της σφαίρας με το επίπεδο κύλισης και διαγράφει μία ευθεία γραμμή παράλληλη προς τον άξονα Ox σ' αυτό το ύψος. Αντικαθιστώντας τις τιμές από τις (10) και (11) στις (2α) και (2β) προκύπτει ότι $x'=\frac{U_0}{\omega_0}\eta\mu\theta$ και $y'=\frac{U_0}{\omega_0}\sigma\upsilon\nu\theta$. Πάλι υψώνουμε

στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε $x'^2+y'^2=\frac{U_0^2}{\omega_0^2}$. Δηλαδή το

κεντροειδές του σώματος είναι ένας κύκλος ακτίνας $\frac{U_0}{\omega_0}$ με κέντρο το κέντρο της σφαίρας

και σε επαφή με το **κεντροειδές χώρου**.

Συμπεράσματα

1. Το θεώρημα Euler για την περιστροφή επιβάλλει όταν θεωρούμε περιστροφική κίνηση γύρω από στιγμιαίο άξονα περιστροφής, το σώμα να εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση για τη δεδομένη χρονική στιγμή.
2. Γενικά στην κινηματική μελέτη, η κίνηση ενός στερεού σώματος (rigid body) σε ένα επίπεδο μπορεί να μεταφραστεί ως κύλιση του κεντροειδούς σώματος κατά μήκος του κεντροειδούς χώρου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Η ιστορική αναφορά, η απόδειξη του Θεωρήματος Euler για την περιστροφή και τα σχήματα 1 και 2 από το www.answers.com
2. "INTRODUCTION TO THEORETICAL MECHANICS" R A. BECKER Mc Graw –Hill 1955.

Ξ. Στεργιάδης