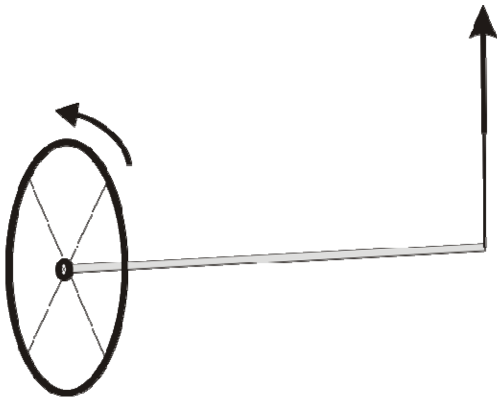
Μεταπτωτική κίνηση τροχού στον … αέρα

Με αφορμή το video που βρήκα στο διαδίκτυο έφτιαξα την άσκηση αυτή με σκοπό να έχουμε μια εκτίμηση της γωνιακής συχνότητας της μεταπτωτικής κίνησης του στερεού. Δείτε πρώτα το video και διαπιστώστε ότι έχουμε ένα φαινόμενο «πρόκληση» !

Άσκηση

Στο ένα άκρο οριζόντιας αβαρούς ράβδου μήκους l είναι τοποθετημένος τροχός ποδηλάτου ακτίνας R έτσι ώστε η ράβδος να είναι κάθετη στο επίπεδο του τροχού και να περνά από το κέντρο μάζας του τροχού. Κρατώντας τη ράβδο ακίνητη σε οριζόντια θέση, θέτουμε τον τροχό σε στροφική κίνηση (χωρίς να ακουμπά στο έδαφος). Όταν ο τροχός αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω_o, με τη βοήθεια ενός σχοινιού που είναι δεμένο στο άλλο άκρο της ράβδου, αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο κρατώντας μόνο το σχοινί (βλ. σχήμα). Παρατηρούμε τότε ότι η ράβδος περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα του σχοινιού παραμένοντας οριζόντια (δεν πέφτει).



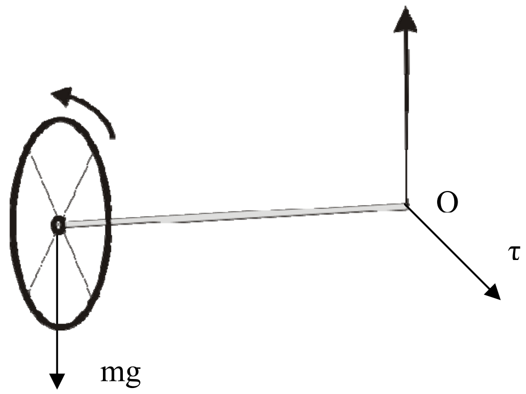
α) Εξηγείστε γιατί η ράβδος (και ο τροχός) αρχίζουν να στρέφονται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα του σχοινιού και με ποια φορά.

β) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα ω της στροφικής κίνησης της ράβδου γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.(Θεωρείστε το άκρο της ράβδου ακίνητο)

Τριβές μεταξύ τροχού και ράβδου δεν υπάρχουν. Η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια και η μάζα του σχοινιού αμελητέα. Θεωρούνται γνωστά τα μεγέθη: R, l, g, ω_o.

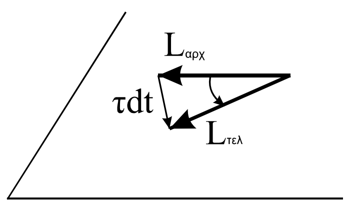
<u>Λύση</u>

α) Όπως φαίνεται στο σχήμα η ροπή του βάρους ως προς το O είναι οριζόντια και κάθετη στη ράβδο. Αν αρχικά ο δίσκος δεν περιστρεφόταν τότε η ροπή αυτή θα προκαλούσε την εμφάνιση στροφορμής, ομόρροπης με τη ροπή, με συνέπεια την «πτώση» του τροχού.



Όμως, όταν ο δίσκος στρέφεται, η ροπή του βάρους, προκαλεί μεταβολή της στροφορμής και μάλιστα λόγω της καθετότητας της ροπής με τη στροφορμή δεν αλλάζει το μέτρο της στροφορμής (όπως μία δύναμη που είναι συνεχώς κάθετη στην ορμή δεν μεταβάλλει το μέτρο της ορμής). Πραγματικά, όταν η ράβδος αρχίσει να περιστρέφεται η ροπή του βάρους εξακολουθεί συνεχώς να παραμένει κάθετη στη στροφορμή η οποία δεν είναι πλέον οριζόντια αλλά έχει και μία (σταθερή) κατακόρυφη συνιστώσα που οφείλεται στη στροφική κίνηση του συστήματος γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. (*Η εμφάνιση της συνιστώσας αυτής γίνεται «σχεδόν αμέσως» και οφείλεται στην οριζόντια μη αξονική δύναμη που ασκείται στο O από το σχοινί. Περισσότερες λεπτομέρειες στα …. «σχόλια».*)

Η φορά περιστροφής της ράβδου είναι εκείνη της «περιστροφής» της **<u>οριζόντιας</u>** συνιστώσας της στροφορμής του συστήματος. Σχεδιάζοντας στο επίπεδο κίνησης της ράβδου την αρχική (οριζόντια) στροφορμή $\mathbf{L}_{αρχ}$ και τη γωνιακή ώθηση $\boldsymbol{\tau}$dt, βρίσκουμε την τελική (οριζόντια) στροφορμή $\mathbf{L}_{τελ}$ και επομένως τη ζητούμενη φορά περιστροφής της ράβδου (βλ.σχήμα). (Η κατακόρυφη συνιστώσα της στροφορμής δεν μεταβάλλεται διότι η ροπή του βάρους είναι οριζόντια.)



β) Σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα dt, η οριζόντια συνιστώσα της στροφορμής έχει στραφεί κατά την απειροστή γωνία $d\varphi = \omega dt$, όπου ω είναι η ζητούμενη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου.

Επειδή $\left|\vec{L}_{\alpha\rho\chi}\right| = \left|\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}\right| = \mathrm{I}\omega_o = mR^2\omega_o$ τότε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής προκύπτει από το μήκος της χορδής του τόξου που έχει ακτίνα $\left|\vec{L}_{\alpha\rho\chi}\right|$ και αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $d\varphi$.

Όμως για την απειροστή γωνία $d\varphi$ το μήκος της χορδής είναι ίσο με το μήκος του τόξου, επομένως:

$$\left|d\vec{L}\right| = \left|\vec{L}_{\alpha\rho\chi}\right| d\varphi = mR^2\omega_o d\varphi$$

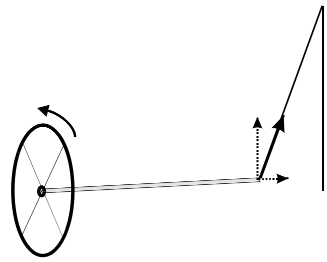
Αλλά, $\left|d\vec{L}\right| = \tau dt = mgldt$

Από τις δύο σχέσεις προκύπτει: $mR^2\omega_o d\varphi = mgldt \;\Rightarrow\; \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{gl}{\omega_o R^2} \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = \dfrac{gl}{\omega_o R^2}}$

Παρατηρήσεις-Σχόλια:

α) Το σημείο Ο δεν παραμένει ακίνητο μόλις αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο. Στις πειραματικές προσπάθειες που έκανα (όχι με τροχό ποδηλάτου αλλά με γυροσκόπιο), το σχοινί διαγράφει κωνική επιφάνεια και το Ο φαίνεται να εκτελεί αρχικά κυκλική τροχιά μικρής ακτίνας.

Δεν αποτελεί βέβαια έκπληξη διότι αφού το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί κυκλική κίνηση, θα πρέπει στο άκρο Ο να ασκείται αξονική δύναμη (κεντρομόλος). Αυτή μπορεί να εμφανιστεί μόνο ως οριζόντια συνιστώσα της τάσης ενός μη κατακόρυφου νήματος.



β) Από τη στιγμή που το σύστημα θα αφεθεί ελεύθερο θα μεσολαβήσει ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt για να μεταβεί στο νέο οριζόντιο επίπεδο στο οποίο θα εκτελέσει τη μεταπτωτική κίνηση. Στο διάστημα αυτό η **ράβδος**, το **σχοινί** και η **κατακόρυφη** από το σημείο ανάρτησης του σχοινιού δεν είναι στο ίδιο επίπεδο άρα εμφανίζεται οριζόντια μη αξονική δύναμη στο άκρο Ο της ράβδου η οποία προκαλεί ροπή (ως προς την αρχική θέση του Ο).

Αν $\tau_{\kappa\alpha\tau}$ η προκαλούμενη ροπή στον κατακόρυφο άξονα στο χρονικό διάστημα dt, μπορούμε να δείξουμε ότι το έργο της είναι κατά προσέγγιση ίσο με την κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης του στερεού γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Πραγματικά,

$W = \int \tau_{\kappa\alpha\tau} \cdot d\theta$ αλλά η ροπή αυτή μεταβάλλει μόνο την κατακόρυφη συνιστώσα της στροφορμής $L_{\kappa\alpha\tau} = \mathrm{I}_{\kappa\alpha\tau}\omega_{\kappa\alpha\tau}$, συνεπώς

$$W = \int \frac{dL_{\kappa\alpha\tau}}{dt} \cdot d\theta = \int \frac{\mathrm{I}_{\kappa\alpha\tau} d\omega_{\kappa\alpha\tau}}{dt} \cdot d\theta = \int \mathrm{I}_{\kappa\alpha\tau} \frac{d\theta}{dt} \cdot d\omega_{\kappa\alpha\tau} = \mathrm{I}_{\kappa\alpha\tau} \int_0^{\omega} \omega_{\kappa\alpha\tau} \cdot d\omega_{\kappa\alpha\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\kappa\alpha\tau}\omega^2$$

όπου $\mathrm{I}_{\kappa\alpha\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{I} + ms^2 = \frac{1}{2}mR^2 + ms^2$ και $s = l + r$ (r : η ακτίνα της κυκλικής κίνησης του άκρου Ο της ράβδου) .Η $\mathrm{I}_{\kappa\alpha\tau}$ είναι ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο ανάρτησης του σχοινιού και απέχει απόσταση s από το κέντρο μάζας ενώ η Ι είναι ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του τροχού που περνά από το κέντρο μάζας).

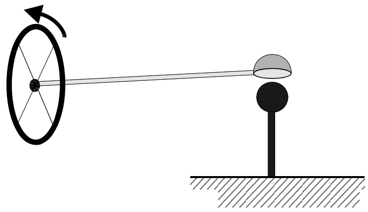
Ο παραπάνω υπολογισμός είναι βέβαια προσεγγιστικός αφού η $\mathrm{I}_{\kappa\alpha\tau}$ μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της ανύψωσης από

$$\frac{1}{2}mR^2 + ml^2 \quad \text{σε} \quad \frac{1}{2}mR^2 + m(l+r)^2$$

Επομένως το έργο που υπολογίσαμε είναι λίγο μεγαλύτερο από το «πραγματικό». Αν όμως υπολογίσουμε και τη μικρή δαπάνη ενέργειας λόγω ανύψωσης του κέντρου μάζας τότε το ενεργειακό ισοζύγιο δείχνει ότι αυξάνεται η κινητική ενέργεια του συστήματος κατά το ποσό που αντιστοιχεί στην στροφική κίνηση γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

γ) Μετά το πέρας της μετάβασης η **ράβδος**, το **σχοινί** και η **κατακόρυφη** (από το σημείο ανάρτησης του σχοινιού) **είναι** στο ίδιο επίπεδο άρα **δεν** εμφανίζεται οριζόντια μη αξονική δύναμη στο άκρο Ο της ράβδου δηλαδή $\tau_{\kappa\alpha\tau} = 0$ επομένως η κατακόρυφη συνιστώσα της στροφορμής $L_{\kappa\alpha\tau}$ παραμένει σταθερή.

δ) Τα ***αποτελέσματα*** της επίλυσης της άσκησης αυτής θα ήταν ακριβή αν το άκρο της ράβδου Ο ήταν ακίνητο. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβεί αν το άκρο της ράβδου στο Ο κατέληγε σε μία μικρή ημισφαιρική κοίλη επιφάνεια ώστε να μπορούσε να τοποθετηθεί στην κεφαλή ενός ακλόνητου κατακόρυφου καρφιού (σφαιρική άρθρωση). Τότε θα είχαμε γλιτώσει από πολλούς μπελάδες !!



ε) ***Σύγκριση με το πείραμα στο video.***

Από τη σχέση που υπολογίσαμε: $\omega = \dfrac{gl}{\omega_o R^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T} = \dfrac{4\pi^2 R^2}{gl\mathrm{T}_o}$

θέτοντας $g = \pi^2\ \mathrm{m/s^2}$ έχουμε $\mathrm{T} = \dfrac{(2R)^2}{l\mathrm{T}_o}$ (R, l, T, $\mathrm{T_o}$ σε SI)

Με μια πρόχειρη εκτίμηση από το video:

$\mathrm{T} = 7\mathrm{s}$, $l = 0{,}25\mathrm{m}$, διάμετρο ποδηλάτου: $2R = 0{,}5\mathrm{m}$

προκύπτει $\mathrm{T_o} = \mathrm{T}^{-1} = 0{,}14\mathrm{s}$!!

Παράλογοοο ;;; Δεν απαντά, άρα λογικό! (θα έλεγε η μάνα στους 10μΜήτσους) **:-)**

Όποιος συνάδελφος διαθέτει στροβοσκόπιο ας μπει στον κόπο να κάνει το πείραμα να μάθουμε !!