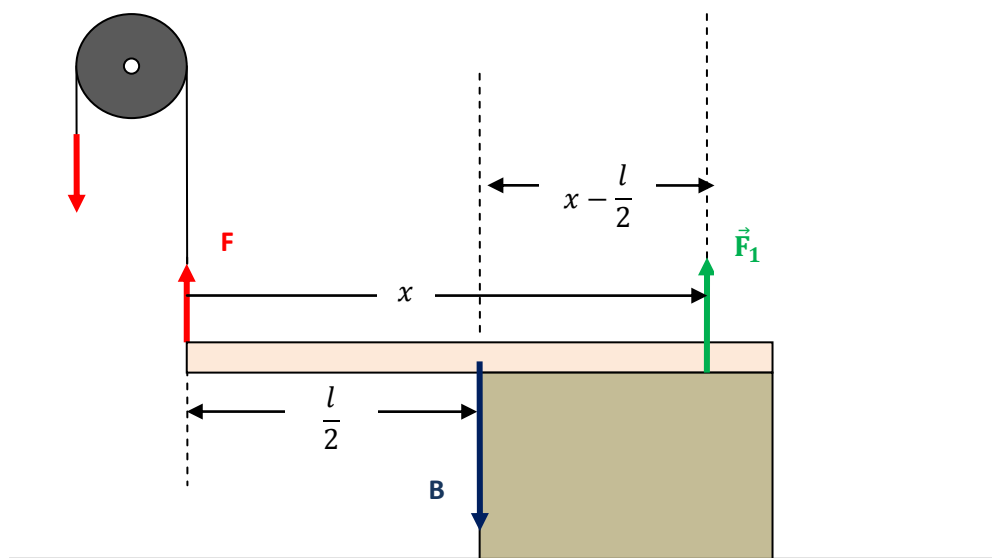


**Πόσο εκτατό μπορεί να είναι ένα μη εκτατό νήμα και πόσο φυσικό  
μπορεί να είναι ένα μηχανικό στερεό.**

**Συνισταμένη δύναμη versus «κατανεμημένης» δύναμης**

Για την ανάδειξη του θέματος θα λύσουμε κάποια προβλήματα και θα διατυπώνουμε απόψεις – συμπεράσματα.

Η ομογενής ράβδος βάρους  $B$  και μήκους  $l$  ισορροπεί οριζόντια όπως φαίνεται και στο σχήμα. Ολόκληρο το δεξί της μισό βρίσκεται σε επαφή με την πάνω επιφάνεια του πάγκου ενώ στο δεξί της άκρο, με τη βοήθεια τροχαλίας και μη εκτατού νήματος, ασκείται η κατακόρυφη δύναμη  $\vec{F}$ . Με δεδομένα το βάρος  $B$  και το μήκος  $l$ , να προσδιοριστούν η  $\vec{F}$  και η δύναμη στήριξης  $\vec{F}_1$  που ο πάγκος ασκεί στη ράβδο.



**Απάντηση**

Ένεκα της ισορροπίας της ράβδου έχουμε τελικά

$$F = B - \frac{Bl}{2x}$$

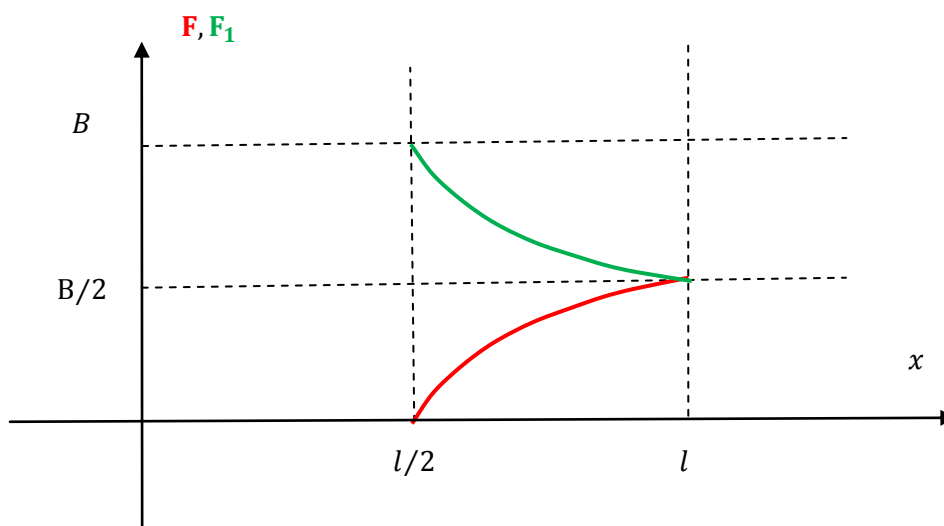
Και

$$F_1 = \frac{Bl}{2x}$$

Όπου

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αντιστοιχούν στα τμήματα υπερβολών που είναι σχεδιασμένες στο παρακάτω διάγραμμα:



**Πόσο ελαστικό είναι το νήμα;**

Από τη μια μεριά πρέπει να εμφανίζει μια ελαστικότητα για να υπάρχει η δυνατότητα η τάση του  $F$  να κινείται στο εύρος τιμών  $\left[\frac{B}{2}, B\right]$ , όμως, από την άλλη, σύμφωνα με τις επιταγές του προβλήματος το νήμα θα πρέπει να είναι μη εκτατό.

Το πρόβλημα λύνεται αν «επιτρέψουμε» στο νήμα να έχει μια ελαστικότητα που να τείνει στο μηδέν ή με άλλα λόγια μια σκληρότητα που να τείνει στο «άπειρο». Έτσι τα παραπάνω μπορούν να συμβιβαστούν εντός μιας «επιμήκυνσης» του νήματος που τείνει στο μηδέν.

### Πόσο φυσικό στερεό είναι η ράβδος;

Η δύναμη στήριξης  $\vec{F}_1$  είναι η συνισταμένη που προκύπτει από μια πυκνότητα κατανομής. Από την ανάλυση που κάναμε παραπάνω φαίνεται ότι το σημείο εφαρμογής της  $\vec{F}_1$  μπορεί να αλλάζει όντας όλο το δεξί μισό της ράβδου σε επαφή με τον πάγκο. Δηλαδή το «κέντρο» της πυκνότητας κατανομής της δύναμης μπορεί να πάρει διάφορες θέσεις. Είναι προφανές ότι εκεί που η πυκνότητα κατανομής είναι μεγαλύτερη η ράβδος θα είναι περισσότερο «πιεσμένη».

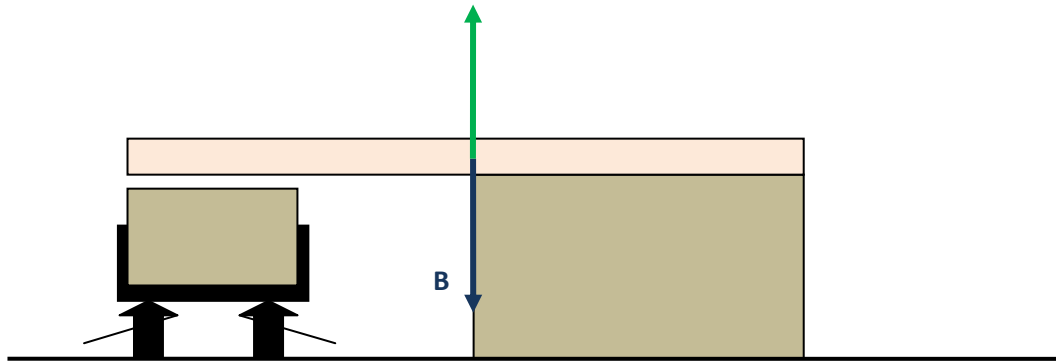
Πρέπει κατά συνέπεια και εδώ να «ακροβατήσουμε» στα όρια, όπως κάναμε και προηγουμένως, να προσδώσουμε μια σχεδόν μηδενική ελαστικότητα στη ράβδο. Άλλωστε στην περίπτωση μας οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ ράβδου και πάγκου δε μπορεί παρά να είναι δυνάμεις «παραμορφώσεων».

### Από μια πυκνότητα κατανομής οδηγούμαστε σε μια μοναδική $\vec{F}_1$ . Το αντίστροφο ισχύει;

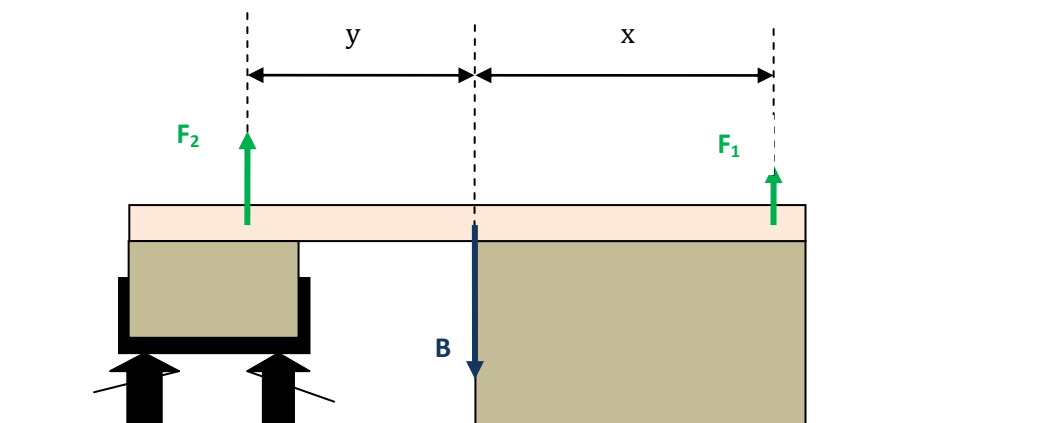
Ισχύει μόνο στις ακραίες θέσεις στις ενδιάμεσες όχι. Σε μια ενδιάμεση υπάρχει ένα πλήθος άπειρων διαφορετικών κατανομών η κάθε μια από τις οποίες μπορεί να οδηγήσει στην  $\vec{F}_1$ . Δηλαδή για τη λύση ενός προβλήματος στο οποίο δεν μας δίδονται αρκετές πληροφορίες η χρήση της κατανομής δεν θα βοηθούσε.

Θεωρούμε τη διάταξη του παρακάτω σχήματος. Η ράβδος ισορροπεί οριακά. Το μοναδικό σημείο στο οποίο η ράβδος δέχεται δύναμη από τον δεξιό πάγκο είναι το μέσον  $x = \frac{l}{2}$ . Η συνάρτηση κατανομής της δύναμης είναι μοναδική και ελέω Dirac γράφεται  $f_1(x) = B^* \delta(x - \frac{l}{2})$ , όπου  $\delta(x)$  η κρουστική συνάρτηση που είναι παντού μηδέν εκτός από το σημείο  $x = 0$  όπου παίρνει την τιμή ένα. Με  $B^*$  έχουμε συμβολίσει το βάρος αλλά με «διάσταση»  $\frac{[F]}{[L]}$ .

Με τους υπερευαίσθητους «γρύλους» μπορούμε να επιφέρουμε ακόμα και «ανεπαίσθητες» μεταβολές στο ύψος και στην κλίση ενός πάγκου του οποίου η πάνω



επιφάνεια θα έλθει σε επαφή με την κάτω επιφάνεια του αριστερού τετάρτου της ράβδου. Ανυψώνουμε τον πάγκο με τους γρύλους διατηρώντας την πάνω του επιφάνεια οριζόντια και τον φέρνουμε σε «απόσταση αναπνοής» από τη ράβδο, είναι και δεν είναι σε επαφή με τη ράβδο και ασκεί μηδενική δύναμη σε αυτήν. Επιφέρουμε τώρα πολύ μικρή μεταβολή στο ύψος και στην κλίση του πάγκου, έτσι ώστε να ασκήσει στη ράβδο μια συνισταμένη



κατακόρυφη δύναμη έστω  $\frac{B}{4}$  με σημείο εφαρμογής που απέχει από το μέσον κατά  $y = \frac{l}{3}$  προσέχοντας ώστε όλη η πάνω επιφάνεια και των δυο πάγκων να βρίσκεται σε επαφή με

την ράβδο και η ράβδος να διατηρεί την οριζόντια θέση της. Μπορεί να συμβεί αυτό; Θα δούμε

Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$xF_1 = yF_2 \text{ και } F_1 + F_2 = B$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}$$

Για

$$F_2 = \frac{B}{4} \text{ και } y = \frac{1}{3}$$

Παίρνουμε

$$F_1 = \frac{3B}{4} \text{ και } x = \frac{1}{9}$$

Όπως έχουμε πει και πριν είναι απείρου πλήθους οι κατανομές η κάθε μια από τις οποίες θα μπορούσε να δώσει  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$ .

Μπορούμε εύκολα να επιλέξουμε τη βέλτιστη κατανομή;

Θεωρητικά είναι αδύνατον ακόμη και αν προσεγγίσουμε το πρόβλημα ηλεκτροδυναμικά.

Τι κάνουμε αν είμαστε υποχρεωμένοι να λύσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα;

Με μετρήσεις προσθέτουμε και άλλα δεδομένα στο πρόβλημα μας και με μεθόδους

**αριθμητικής ανάλυσης** προσδιορίζουμε τη βέλτιστη κατανομή.

Ας μη μας διαφεύγει ότι χωρίς χρήση κατανομών χρησιμοποιήσαμε ήδη δυο πρόσθετα δεδομένα. Δηλαδή το πρόβλημα μας επιδέχεται άπειρες λύσεις είτε χρησιμοποιήσουμε κατανομές είτε όχι που σημαίνει ότι τα δεδομένα μας δεν επαρκούν.

Τα παραπάνω θα γινόταν πιο πιστευτά αν θεωρούσαμε την ηλεκτροδυναμική φύση των ανεπαίσθητων «επιμηκύνσεων» και «παραμορφώσεων»

Και ένα τελικό επιχείρημα

Θεωρώντας ανεπαίσθητες μεταβολές είναι κάτι σαν αυτό που κάνουμε και στα μαθηματικά όταν προσεγγίζουμε ένα όριο μιας συνάρτησης  $f(x)$  όταν  $x \rightarrow a$  σαν το όριο όταν  $x \rightarrow a^-$  και όταν  $x \rightarrow a^+$ .

Τελικά όταν σώματα έρχονται σε επαφή δεν είναι τα ίδια με αυτό που ήταν πριν την επαφή.

Τα μηχανικά στερεά παραμένουν σχεδόν ίδια.

Ε. Λαμπράκης