<u>Περιβάλλουσες στις ταλαντώσεις</u>

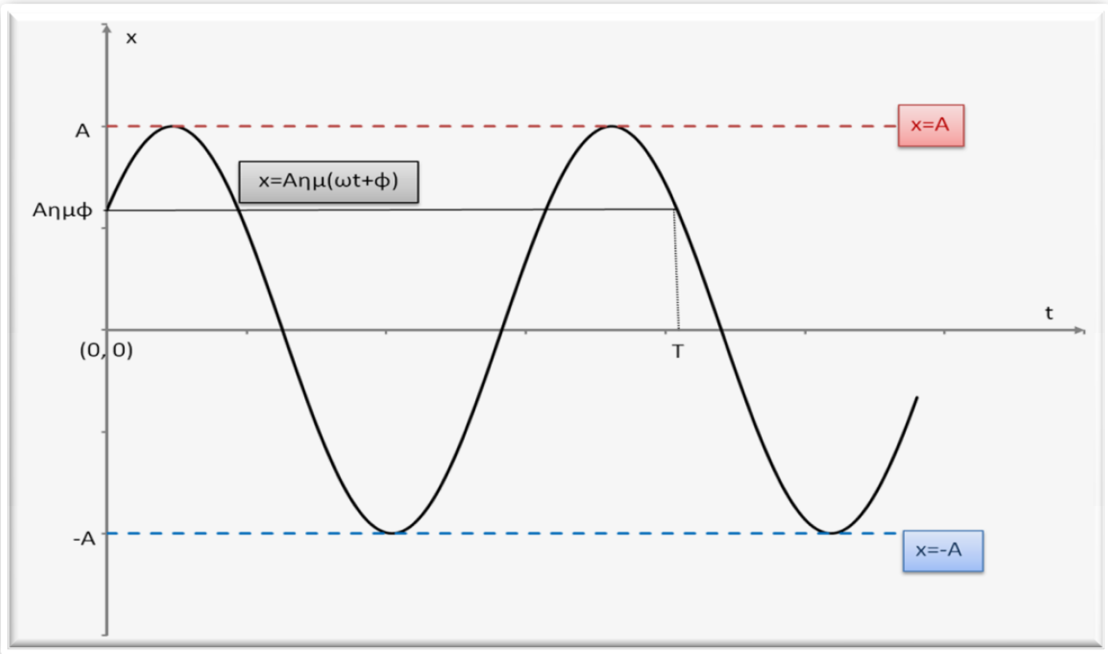
- Στην **απλή αρμονική ταλάντωση** με απομάκρυνση

$$\mathbf{x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)}$$

$$|\eta\mu(\omega t + \varphi)| \leq 1 \overset{A>0}{\iff} |A\eta\mu(\omega t + \varphi)| \leq A \iff |x| \leq A \iff$$

$$-A \leq x \leq A$$

Έτσι
<u>«Πάνω» περιβάλλουσα</u>: $\mathbf{x = A}$
<u>«Κάτω» περιβάλλουσα</u>: $\mathbf{x = -A}$



- Στην **φθίνουσα ταλάντωση** με απομάκρυνση

$$\mathbf{x = A_0 e^{-\Lambda t}\eta\mu(\omega t + \varphi)}$$

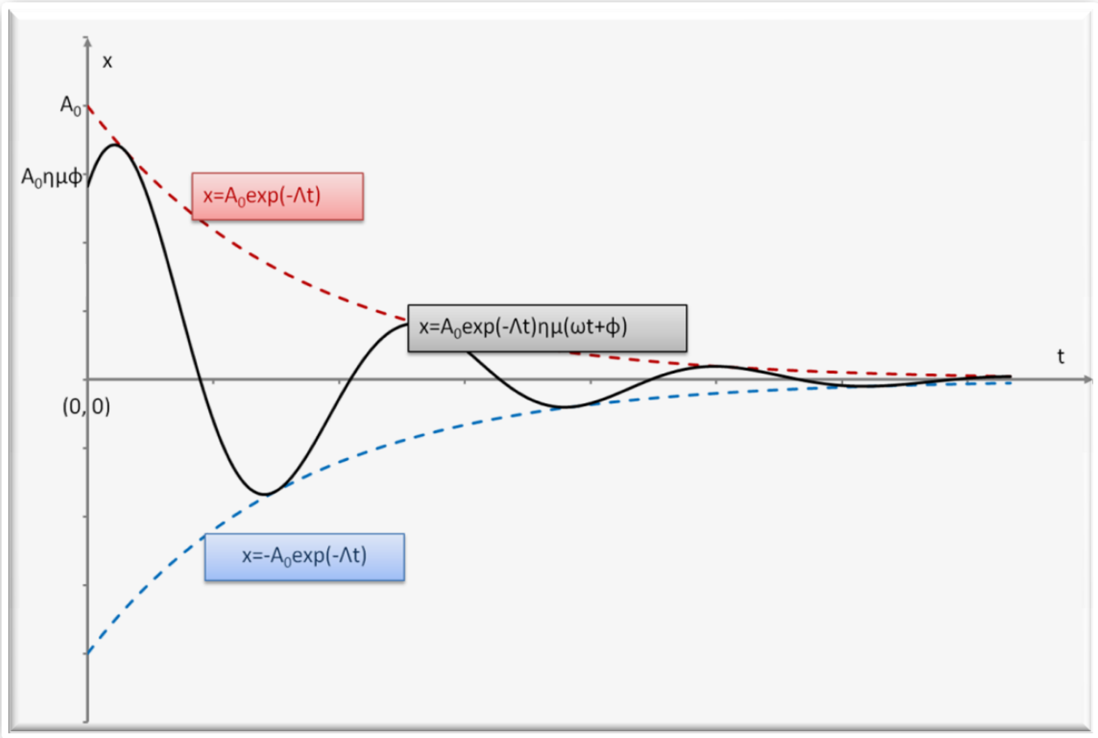
$$|\eta\mu(\omega t + \varphi)| \leq 1 \xLongleftrightarrow{A_0 e^{-\Lambda t}>0} \left|A_0 e^{-\Lambda t}\eta\mu(\omega t + \varphi)\right| \leq A_0 e^{-\Lambda t} \iff$$

$$|x| \leq A_0 e^{-\Lambda t} \iff$$

$$-A_0 e^{-\Lambda t} \leq x \leq A_0 e^{-\Lambda t}$$

Οπότε
<u>«Πάνω» περιβάλλουσα</u>: $\mathbf{x = A_0 e^{-\Lambda t}}$
<u>«Κάτω» περιβάλλουσα</u>: $\mathbf{x = -A_0 e^{-\Lambda t}}$

Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται ότι τα σημεία στα οποία οι περιβάλλουσες εφάπτονται με την καμπύλη της απομάκρυνσης δεν είναι σημεία τοπικών ακρότατων για την απομάκρυνση. Στα σημεία αυτά η κοινή κλίση περιβάλλουσας και απομάκρυνσης είναι διάφορη του μηδενός με συνέπεια στις θέσεις αυτές το ταλαντούμενο σώμα να έχει μη μηδενική ταχύτητα.



- Στην περιοδική κίνηση που παρουσιάζει **διακροτήματα** με απομάκρυνση

$$\mathbf{x = A' \eta\mu \bar{\omega} t}$$

όπου $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t,\ \ A > 0$ και $\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$

έχουμε

$$|\eta\mu\bar{\omega}t| \leq 1 \Leftrightarrow |A'\eta\mu\bar{\omega}t| \leq |A'| \Leftrightarrow |x| \leq |A'| \Leftrightarrow$$

$$-|A'| \leq x \leq |A'|$$

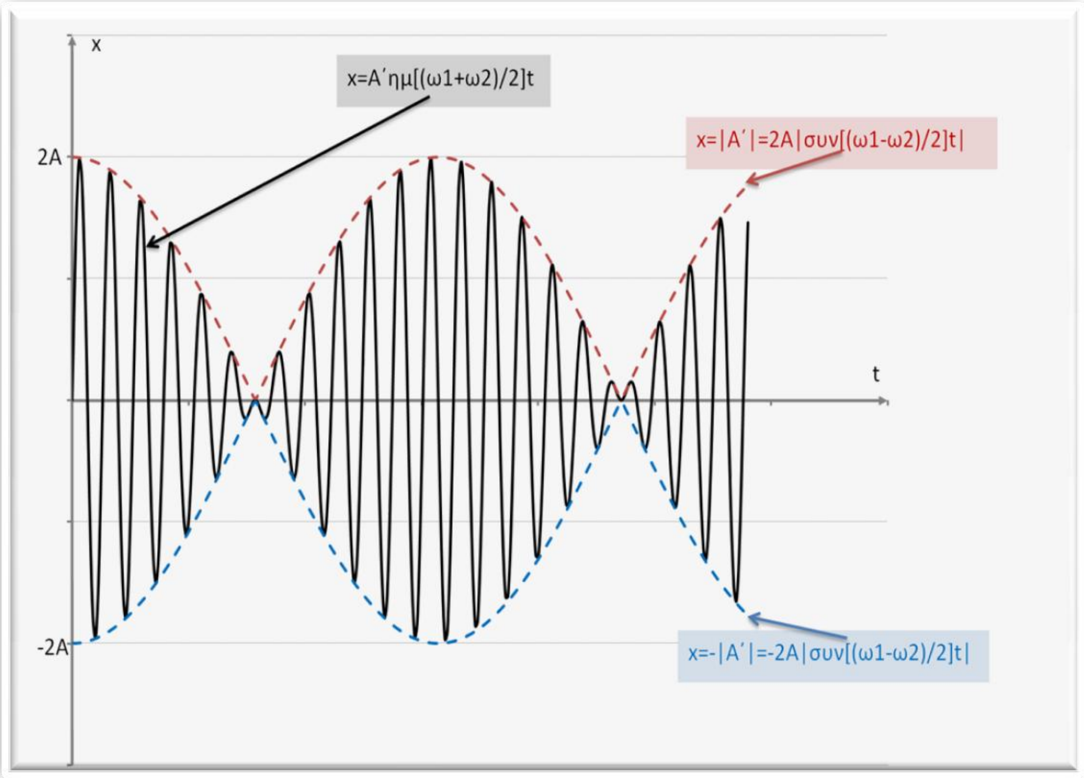
Δηλαδή

«Πάνω» περιβάλλουσα: $\mathbf{x = |A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right|}$

«Κάτω» περιβάλλουσα: $\mathbf{x = -|A'| = -2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right|}$

Η περίοδος των διακροτημάτων είναι η περίοδος των περιβαλλουσών δηλαδή

$$\mathbf{T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}}$$



- ✓ Παρατηρούμε ότι και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις οι περιβάλλουσες εμφανίζουν συμμετρία ως προς τον άξονα των τετμημένων.
- ✓ Πρόσφατα στην τάξη, ενώ σχεδίαζα την καμπύλη της περιοδικής κίνησης που δίνει διακροτήματα ανάμεσα στις περιβάλλουσες, ένας μαθητής διερωτήθηκε αν είναι δυνατόν να ισχύει: $\mathbf{x = \pm 2A}$. Το είδαμε σα μαθηματικό «παιχνίδι» και το ψάξαμε.

Για να συμβεί $x = 2A$

θα πρέπει

$$\text{συν}\frac{\boldsymbol{\omega_1-\omega_2}}{\mathbf{2}}t\cdot\text{ημ}\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t = 1$$

δηλαδή

$$\text{συν}\frac{\boldsymbol{\omega_1-\omega_2}}{\mathbf{2}}t = \text{ημ}\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t = 1 \text{ ή } \text{συν}\frac{\boldsymbol{\omega_1-\omega_2}}{\mathbf{2}}t = \text{ημ}\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t = -1$$

Ας δούμε την πρώτη περίπτωση

Έχουμε

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t = 2\kappa\pi \text{ και } \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} \text{ με } 0 \neq \kappa \in Z, \lambda \in Z \text{ απ' όπου}$$

$$\omega_1 = \left[2(\lambda+\kappa) + \frac{1}{2}\right]\frac{\pi}{t} \text{ και } \omega_2 = \left[2(\lambda-\kappa) + \frac{1}{2}\right]\frac{\pi}{t}$$

Θέτοντας για παράδειγμα $\frac{\pi}{t} = 2\frac{rad}{s}$

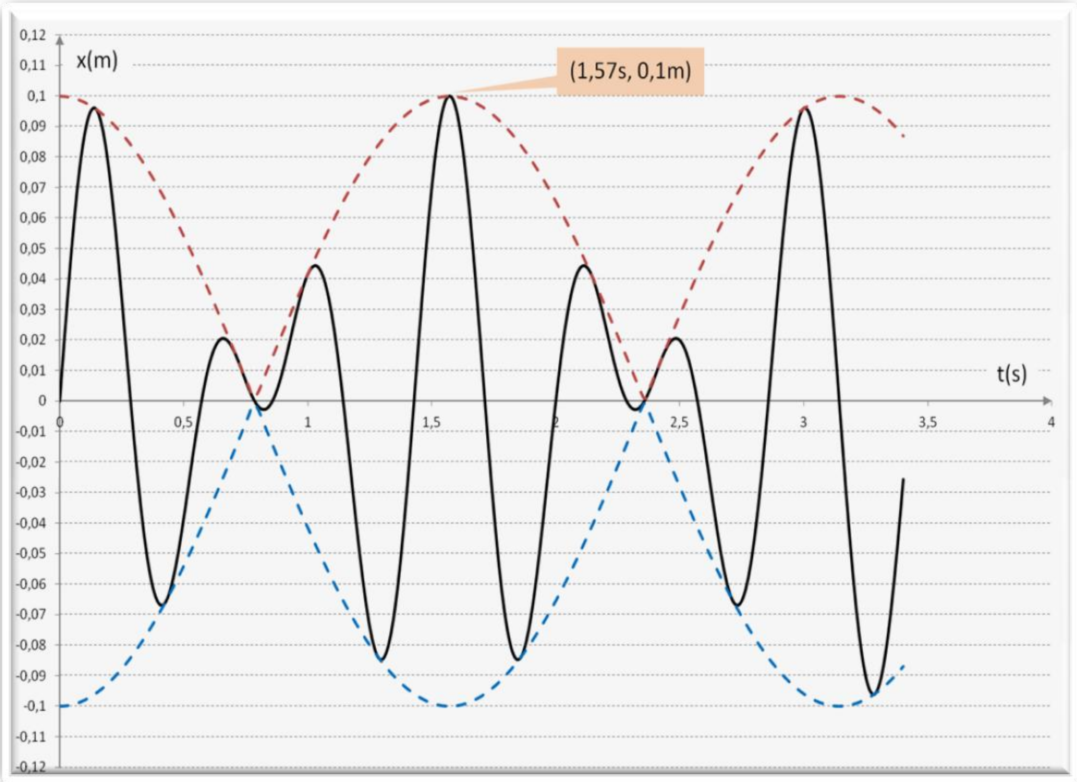
Δηλαδή

$$\mathbf{t \cong 1,57s}$$

και $\lambda = 3, \kappa = 1$ παίρνουμε

$$\boldsymbol{\omega_1 = 13\frac{rad}{s},\ \omega_2 = 9\frac{rad}{s}}$$

και για $\mathbf{A = 0,05m}$ έχουμε το παρακάτω διάγραμμα



Για να συμβεί $x = -2A$
θα πρέπει

$$συν\frac{ω_1 - ω_2}{2}t \cdot ημ\frac{ω_1 + ω_2}{2}t = -1$$

δηλαδή
$συν\frac{ω_1-ω_2}{2}t = 1$ και $ημ\frac{ω_1+ω_2}{2}t = -1$ ή $συν\frac{\boldsymbol{ω_1-ω_2}}{\mathbf{2}} = -1$ και $ημ\frac{ω_1+ω_2}{2}t = 1$
Ας δούμε την πρώτη περίπτωση.
Έχουμε

$$\frac{\boldsymbol{ω_1-ω_2}}{\mathbf{2}}t = 2κπ \;\; \text{και} \; \frac{ω_1+ω_2}{2}t = 2λπ + 3\frac{π}{2} \;\; με \; 0 \neq κ \in Z, λ \in Z$$

απ’ όπου

$$ω_1 = \left[2(λ+κ) + \frac{3}{2}\right]\frac{π}{t} \text{και} \; ω_2 = \left[2(λ-κ) + \frac{3}{2}\right]\frac{π}{t}$$

Θέτοντας για παράδειγμα $\frac{π}{t} = 2\frac{\boldsymbol{rad}}{\boldsymbol{s}}$
Δηλαδή

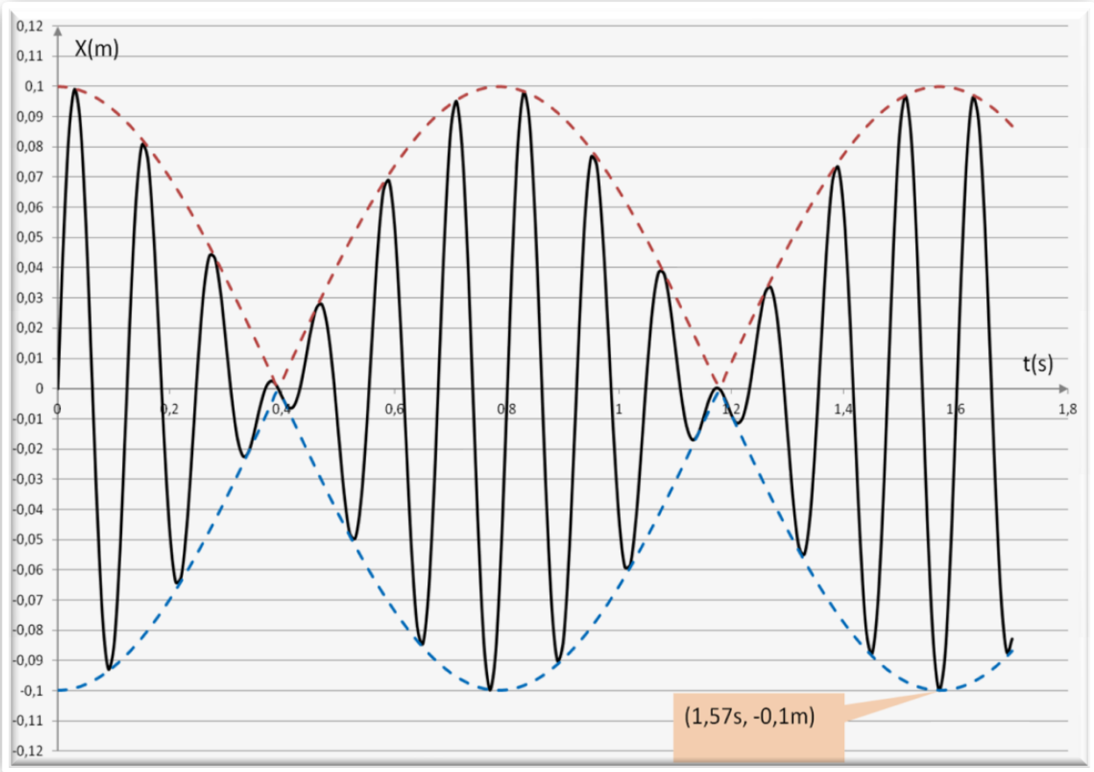
$$\mathbf{t \cong 1,57s}$$

και $λ = 3, κ = 1$ παίρνουμε

παίρνουμε

$$\boldsymbol{ω_1 = 55\frac{rad}{s}, \;\; ω_1 = 47\frac{rad}{s}}$$

και για $\mathbf{A = 0,05m}$ έχουμε το παρακάτω διάγραμμα



Δηλαδή μπορεί περιστασιακά να συμβεί. Αλλά και να συμβεί «κάτι τρέχει στα γύφτικα» όπως είπε τελικά κι' ένας μαθητής.
Ας είναι έτσι κι' αλλιώς εμείς από την αρχή σα μαθηματικό πρόβλημα το αντιμετωπίσαμε. Άλλωστε και για τις ανάγκες της «διαγραμματικής» παρουσίασης επιλέξαμε στην μία των περιπτώσεων $\boldsymbol{\omega_1 = 13\frac{rad}{s},\ \omega_2 = 9\frac{rad}{s}}$ δηλαδή συχνότητες που απέχουν αρκετά ώστε να δυσανασχετεί ο φίλος ο Γιάννης ο Δογραματζάκης!