

Απόδειξη των σχέσεων

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\phi} \\ \varepsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sin\phi} \end{cases}$$

Από την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\eta\mu\omega t + A_2\eta\mu(\omega t + \phi) \Rightarrow$$

$$x = A_1\eta\mu\omega t + A_2(\eta\mu\omega t\sin\phi + \sin\omega t\eta\mu\phi). \quad (1)$$

Χρησιμοποιήθηκε η τριγωνομετρική ταυτότητα: $\eta\mu(a+b) = \eta\mu a\sin b + \sin a\eta\mu b$.

Από την (1) έχω τώρα διαδοχικά:

$$x = A_1\eta\mu\omega t + A_2\eta\mu\omega t\sin\phi + A_2\sin\omega t\eta\mu\phi \Rightarrow$$

$$x = (A_1 + A_2\sin\phi)\eta\mu\omega t + A_2\eta\mu\phi\sin\omega t \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{(A_1 + A_2\sin\phi)^2 + (A_2\eta\mu\phi)^2} \left(\frac{(A_1 + A_2\sin\phi)}{\sqrt{(A_1 + A_2\sin\phi)^2 + (A_2\eta\mu\phi)^2}} \eta\mu\omega t + \frac{A_2\eta\mu\phi}{\sqrt{(A_1 + A_2\sin\phi)^2 + (A_2\eta\mu\phi)^2}} \sin\omega t \right), \quad (2)$$

όπου στο τελευταίο βήμα πολλαπλασίασα και διαίρεσα με $\sqrt{(A_1 + A_2\sin\phi)^2 + (A_2\eta\mu\phi)^2}$.

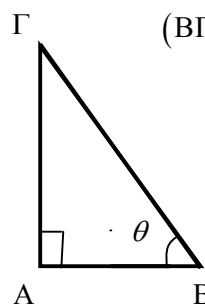
Στην σχέση (2) το υπόριζο $(A_1 + A_2\sin\phi)^2 + (A_2\eta\mu\phi)^2$ είναι πάντα θετικό άρα δεν χρειάζεται καμιά ειδική μέριμνα για αυτό. Παραπέρα,

$$(A_1 + A_2\sin\phi)^2 + (A_2\eta\mu\phi)^2 = A_1^2 + \underline{A_2^2\sin^2\phi} + 2A_1A_2\sin\phi + \underline{A_2^2\eta\mu^2\phi} = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\phi$$

Άρα η (2) γράφεται

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\phi} \left(\frac{(A_1 + A_2\sin\phi)}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\phi}} \eta\mu\omega t + \frac{A_2\eta\mu\phi}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\phi}} \sin\omega t \right). \quad (3)$$

Επειδή τώρα τα A_1 , A_2 είναι πραγματικοί αριθμοί μπορούμε να βρούμε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, τέτοια ώστε (δες το διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο):



$$\begin{aligned} (B\Gamma) &= A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\phi \\ (AB) &= A_1 + A_2\sin\phi \\ (A\Gamma) &= A_2\eta\mu\phi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi)}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi}} \\ \eta\mu\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi}} \end{cases}.$$

Οπότε η (3) παίρνει τελικά την παρακάτω μορφή:

$$x = A(\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\omega t + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\omega t) \quad \acute{\eta}$$

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta), \quad (4\alpha)$$

όπου

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi}, \quad (4\beta)$$

και

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{A_2\eta\mu\phi}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi}}}{\frac{(A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi)}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi}}} \quad \acute{\eta}$$

$$\epsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi}. \quad (4\gamma)$$

Θα γενικεύσουμε τώρα τη μέθοδο και στην γενική περίπτωση όπου:

$$x_1 = A_1\eta\mu(\omega t + \phi_1) \quad \text{και} \quad x_2 = A_2\eta\mu(\omega t + \phi_2).$$

Έχουμε διαδοχικά ακολουθώντας παρόμοια βήματα με προηγουμένως:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\eta\mu(\omega t + \phi_1) + A_2\eta\mu(\omega t + \phi_2) =$$

$$A_1(\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\phi_1 + \sigma\upsilon\nu\omega t\eta\mu\phi_1) + A_2(\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\phi_2 + \eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\phi_2) =$$

$$(A_1\sigma\upsilon\nu\phi_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi_2)\eta\mu\omega t + (A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2)\sigma\upsilon\nu\omega t =$$

$$\sqrt{(A_1\sigma\upsilon\nu\phi_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi_2)^2 + (A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2)^2} \left(\frac{A_1\sigma\upsilon\nu\phi_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi_2}{\sqrt{(A_1\sigma\upsilon\nu\phi_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi_2)^2 + (A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2)^2}} \eta\mu\omega t + \frac{A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2}{\sqrt{(A_1\sigma\upsilon\nu\phi_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi_2)^2 + (A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2)^2}} \sigma\upsilon\nu\omega t \right).$$

Αλλά

$$(A_1\sigma\upsilon\nu\phi_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi_2)^2 + (A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2)^2 =$$

$$A_1^2\sigma\upsilon\nu^2\phi_1 + A_2^2\sigma\upsilon\nu^2\phi_2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi_1\sigma\upsilon\nu\phi_2 + A_1^2\eta\mu^2\phi_1 + A_2^2\eta\mu^2\phi_2 + 2A_1A_2\eta\mu\phi_1\eta\mu\phi_2 =$$

$$A_1^2(\sigma\upsilon\nu^2\phi_1 + \eta\mu^2\phi_1) + A_2^2(\sigma\upsilon\nu^2\phi_2 + \eta\mu^2\phi_2) + 2A_1A_2(\sigma\upsilon\nu\phi_1\sigma\upsilon\nu\phi_2 + \eta\mu\phi_1\eta\mu\phi_2) =$$

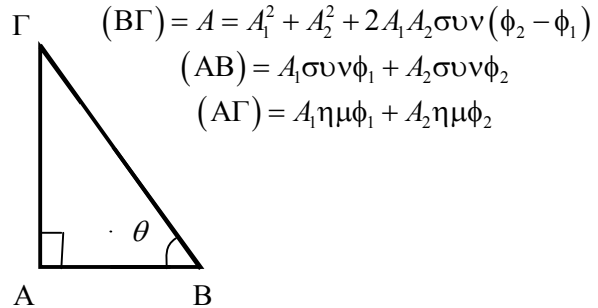
$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin(\phi_2 - \phi_1).$$

Συνεπώς εν όψει των παραπάνω παίρνουμε:

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin(\phi_2 - \phi_1)} \begin{pmatrix} \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin(\phi_2 - \phi_1)}} \eta\mu\omega t + \\ \frac{A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin(\phi_2 - \phi_1)}} \sigma\upsilon\nu\omega t \end{pmatrix}.$$

Επειδή τώρα τα A_1, A_2 είναι πραγματικοί αριθμοί μπορούμε να βρούμε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, τέτοια ώστε (δες το διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο):

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin(\phi_2 - \phi_1)}} \\ \eta\mu\theta = \frac{A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin(\phi_2 - \phi_1)}} \end{cases}.$$



Οπότε έχουμε τελικά:

$$x = A(\sin\theta\eta\mu\omega t + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\omega t) \quad \text{ή}$$

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta), \tag{5a}$$

όπου

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin(\phi_2 - \phi_1)}, \tag{5β}$$

και

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin(\phi_2 - \phi_1)}}}{\frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin(\phi_2 - \phi_1)}}} \quad \text{ή}$$

$$\epsilon\phi\theta = \frac{A_1\eta\mu\phi_1 + A_2\eta\mu\phi_2}{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}. \tag{5γ}$$

Δημήτρης Αναγνώστου

