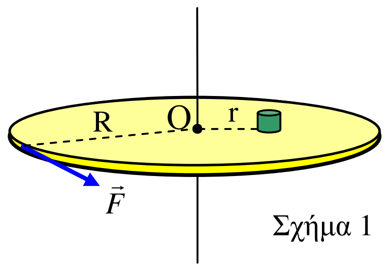
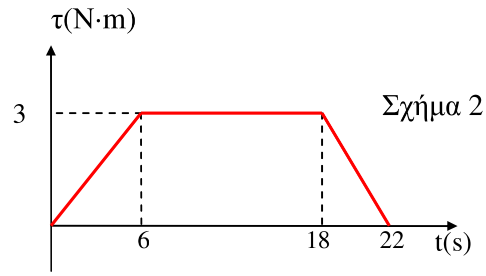
Η στατική τριβή σε ρόλο κεντρομόλου και επιτρόχιας δύναμης

Στον τροχό του σχήματος 1 ακτίνας R=2m και μάζας M=4,75kg έχει τοποθετηθεί ένα σώμα $Σ_1$ πολύ μικρών διαστάσεων μάζας m=2kg σε απόσταση r=0,5m, από το κέντρο του τροχού. Το σύστημα αρχικά ηρεμεί και την t=0s αρχίζει να ασκείται συνεχώς εφαπτομενική δύναμη στον τροχό η ροπή της οποίας μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο σχήμα 2.





Το σώμα εμφανίζει τριβές με τον τροχό και ο μέγιστος συντελεστής στατικής τριβής που μπορεί να αναπτυχθεί μεταξύ του σώματος και του τροχού είναι μ=0,6. Αν γνωρίζουμε ότι σε κάποιο στάδιο της κίνησης το σώμα ολισθαίνει και χάνεται η επαφή του σώματος με τον τροχό να βρεθεί:

α) Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού την t=6s και να αποδειχθεί ότι δεν έχει χαθεί η επαφή του τροχού με το σώμα $Σ_1$.

β) Να βρεθεί η δύναμη επαφής που δέχεται το σώμα από τον τροχο την t=10s.

γ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που χάνεται η επαφή του σώματος με τον τροχό.

δ) Να γίνει το διάγραμμα της γωνιακής επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο και να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του τροχού την t=22s

ε) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται ο τροχός από τον άξονα την στιγμή 20s.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$. Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας $I_{cm} = ½\, M·R^2$.
Επιπλέον θεωρείστε ότι μόλις αρχίσει η ολίσθηση του σώματος $Σ_1$ πάνω στον τροχό, το σώμα $Σ_1$ φθάνει σχεδόν ακαριαία στην περιφέρεια του τροχού και τον εγκαταλείπει.

Απάντηση

α) Στο σύστημα επιδρούν μόνο οι εξωτερικές ροπές. Έτσι η μόνη εξωτερική ροπή για το σύστημα ως προς τον άξονα περιστροφής είναι η ροπή της δύναμης που ασκείται στον τροχό. Για όσο χρόνο τα σώματα στρέφονται ως ενιαίο σώμα η γωνιακή επιτάχυνση θα μεταβάλλεται για το σύστημα όπως ακριβώς μεταβάλλεται η ροπή της δύναμης F. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ότι δεν ξέρουμε ποια χρονική στιγμή χάνεται η επαφή των σωμάτων. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να εξετάζουμε κάθε φορά αν τα σώματα είναι μαζί.

Στον κατακόρυφο άξονα το σώμα m ισορροπεί και έτσι $ΣF_y=0 \Rightarrow N–w=0 \Rightarrow N=w \Rightarrow$ N=20N. Έτσι η μέγιστη στατική τριβή είναι $T_{στ,max}=μN=0,6·20 \Rightarrow T_{στ,max}=12N$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι $I_Σ=I_{τρ}+I_m \Rightarrow I_Σ= ½\, M·R^2 + m·r^2 \Rightarrow I_Σ= 9,5+0,5$ $\Rightarrow I_Σ =10kg·m^2$.

Υποθέτουμε ότι τα σώματα είναι σε επαφή.
Από το εμβαδό του διαγράμματος ροπής – χρόνου παίρνουμε τη μεταβολής της στροφορμής.
Έτσι από (0 – 6)s

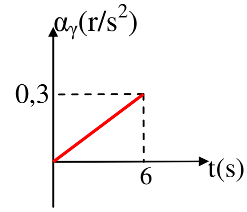
$$\Delta L_{(0-6)s} = 9\frac{kg\cdot m^2}{s} \Rightarrow L_{6s} - L_{0s} = 9 \Rightarrow I_\Sigma \omega_{6s} - 0 = 9 \Rightarrow 10\cdot\omega_{6s} = 9kg\cdot m^2/s \Rightarrow \omega_{6s} = 0,9r/s$$

Από (0 – 6)s η ροπή αυξάνεται γραμμικά. Η ροπή του συστήματος είναι ευθεία της μορφής $\tau_{\varepsilon\xi} = \lambda\cdot t$ από όπου για t=6s προκύπτει τ=3N και τελικά λ= 0,5 N·m/s δηλ.

$\boldsymbol{\tau_{\varepsilon\xi} = 0,5\cdot t}$

Ενώ κάθε στιγμή ισχύει και $\tau_{\varepsilon\xi} = I_\Sigma\cdot\alpha_\gamma \Rightarrow 0,5t = 10\cdot\alpha_\gamma \Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha_\gamma = t/20}$

Για t=6s$\Rightarrow \alpha_\gamma=0,3r/s^2$ και το διάγραμμα της γωνιακής επιτάχυνσης από (0–6)s φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3

Η δύναμη της στατικής τριβής αναλύεται στο επίπεδο του τροχού σε δύο συνιστώσες. Μία επιτρόχια $T_{\sigma\tau,\varepsilon\pi}$ η οποία επιταχύνει το σώμα m και μία ακτινική η οποία έχει ρόλο κεντρομόλου $T_{\sigma\tau,\kappa}$.

$T_{\sigma\tau,\varepsilon\pi}=m\cdot\alpha_{\varepsilon,m}=m\cdot\alpha_\gamma\cdot r \Rightarrow T_{\sigma\tau,\varepsilon\pi}=1\cdot\alpha_\gamma$

$T_{\sigma\tau,\kappa}=m\cdot\omega^2\cdot r=2\cdot\omega^2\cdot 0,5\Rightarrow T_{\sigma\tau,\kappa}=\omega^2$

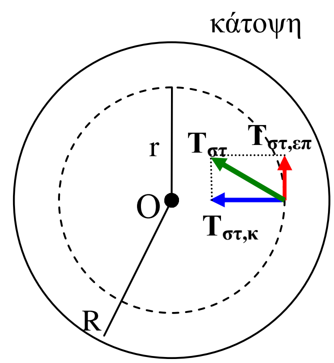
$$\text{Από } (0-6)s\begin{cases}T_{\sigma\tau,\varepsilon\pi}=1\cdot\alpha_\gamma\\ T_{\sigma\tau,\kappa}=1\cdot\omega^2\end{cases}$$

για t=6s προκύπτει $T_{\sigma\tau,\varepsilon\pi}=0,3N$ και $T_{\sigma\tau,k}=0,9^2=0,81N$

Η στατική τριβή είναι

$$T_{\sigma\tau}=\sqrt{T^2_{\sigma\tau,\varepsilon\pi}+T^2_{\sigma\tau,\kappa}}=\sqrt{0,3^2+0,81^2}=\sqrt{0,09+0,6561}\Rightarrow$$

$$T_{\sigma\tau}=\sqrt{0,7461}\Rightarrow T_{\sigma\tau}=0,863N$$



Σχήμα 4

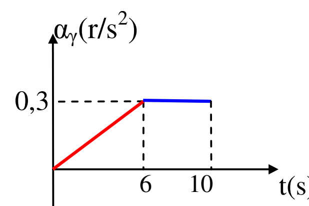
Η στατική τριβή είναι μικρότερη από την οριακή που σημαίνει ότι ο τροχός και το σώμα στρέφονται σαν ένα σώμα. Έτσι η γωνιακη ταχύτητα του τροχού είναι ω=0,9r/s.

β) Εάν δεν χάνεται η επαφή των σωμάτων τότε η γωνιακή επιτάχυνση από (6–10)s παραμένει σταθερή και ίση με $\alpha_\gamma=0,3r/s^2$ όση έχει αποκτήσει την t=6s. Το σύστημα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση. Το διάγραμμα της γωνιακής επιτάχυνσης είναι το διπλανό από όπου και παίρνουμε

$$\Delta\omega_{(0\text{-}10)s}=2,1r/s\Rightarrow\omega_{10s}-\omega_{0s}=2,1\Rightarrow\omega_{10s}=2,1r/s$$

$T_{\sigma\tau,\varepsilon\pi}=m\cdot\alpha_{\varepsilon,m}=m\cdot\alpha_\gamma\cdot r \Rightarrow T_{\sigma\tau,\varepsilon\pi}=0,3N$

$T_{\sigma\tau,\kappa}=m\cdot\omega^2\cdot r=2\cdot\omega^2\cdot 0,5\Rightarrow T_{\sigma\tau,\kappa}=\omega^2$



Σχήμα 5

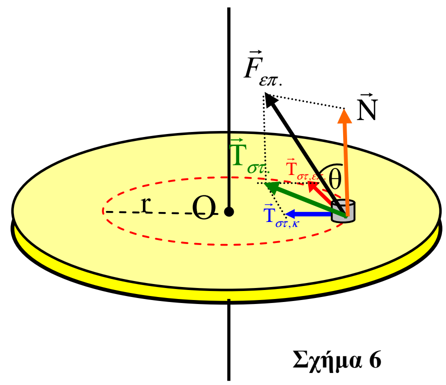
$$\text{Από } (6-10)s\begin{cases}T_{\sigma\tau,\varepsilon\pi}=0,3N\\ T_{\sigma\tau,\kappa}=1\cdot\omega^2\end{cases}$$

Η κεντρομόλος στατική τριβή είναι: $T_{στ,κ}=ω^2 \Rightarrow$ από όπου για t=10s προκύπτει $T_{στ,κ}=2,1^2=4,41N$

Η στατική τριβή είναι:

$$T_{στ}=\sqrt{T^2_{στ,επ}+T^2_{στ,κ}}=\sqrt{0,3^2+4,41^2}=\sqrt{0,09+19,4481}\Rightarrow T_{στ}=\sqrt{19,5381}\Rightarrow T_{στ}\simeq 4,42N$$

Η τιμή είναι μικρότερη από την οριακή άρα δεν έχει χαθεί η επαφή των σωμάτων και η γωνιακή ταχύτητα είναι αυτή που υπολογίσαμε. Η δύναμη επαφής είναι η συνισταμένη της στατικής τριβής $T_{στ}$ και της κατακόρυφης Ν, το μέτρο της οποίας είναι ίσο με 20N. Οι δύο αυτές συνιστώσες είναι κάθετες μεταξύ τους. Έτσι προκύπτει



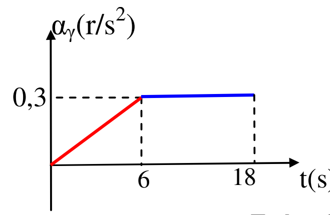
Σχήμα 6

$$F_{επ.}=\sqrt{T^2_{στ}+N^2}=\sqrt{4,42^2+20^2}=\sqrt{19,5364+400}\Rightarrow$$
$$F_{επ.}=\sqrt{419,5364}\Rightarrow F_{επ.}\simeq 20,48N$$

$$εφθ=\frac{T_{στ}}{N}=\frac{0,3}{4,42}$$

γ) Θα δούμε αν η επαφή συνεχίζεται εως την t=18s. Εάν δεν χάνεται η επαφή των σωμάτων τότε η γωνιακή επιτάχυνση από (6 – 18)s παραμένει σταθερή και ίση με $α_γ=0,3r/s^2$. Το σύστημα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση. Το διάγραμμα της γωνιακής επιτάχυνσης είναι το διπλανό από όπου και παίρνουμε

$Δω_{(0\text{-}18)s}=4,5r/s \Rightarrow ω_{18s}-ω_{0s}=4,5 \Rightarrow ω_{18s}=4,5r/s$



Σχήμα 7

Η επιτρόχια στατική τριβή θα είναι $T_{στ,επ}=0,3N$ ίση με αυτή που είχε την t=6s.

Η κεντρομόλος στατική τριβή θα είναι:
$T_{στ,κ}=m\cdot ω^2\cdot r \Rightarrow T_{στ,κ}=ω^2 \Rightarrow$ από όπου για t=18s προκύπτει $T_{στ,επ}=4,5^2=20,25N$

Η στατική τριβή είναι:

$$T_{στ}=\sqrt{T^2_{στ,επ}+T^2_{στ,κ}+}=\sqrt{0,3^2+20,25^2}=\sqrt{0,09+410,0625}\Rightarrow T_{στ}=\sqrt{410,1525}\Rightarrow$$
$$T_{στ}\simeq 20,252N$$

Η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από την οριακή τιμή της στατικής τριβής που σημαίνει ότι η επαφή έχει χαθεί κάποια προηγούμενη χρονική στιγμή.

Από την οριακή τιμή της στατικής τριβής βρίσκουμε την οριακή γωνιακή ταχύτητα. Η $T_{στ,επ}$ έχει την ίδια τιμή από (0 – 18)s δηλ. $T_{στ,επ}=0,3N$. Συνεπώς η κεντρομόλος στατική τριβή θα καθορίσει και την μέγιστη οριακή τριβή και από αυτή θα βρούμε την οριακή γωνιακή ταχύτητα.

$$T_{\sigma\tau,\max} = \sqrt{T^2_{\sigma\tau,\varepsilon\pi} + T^2_{\sigma\tau,\kappa,\max}} \Rightarrow 12 = \sqrt{0,3^2 + T^2_{\sigma\tau,\kappa,\max}} \Rightarrow 144 = 0.09 + T^2_{\sigma\tau,\kappa,\max} \Rightarrow$$
$$T_{\sigma\tau,\kappa,\max} = \sqrt{143,91} \Rightarrow T_{\sigma\tau,\kappa,\max} = 11,99 \Rightarrow \omega^2_{\max} \simeq 11,99 \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{11,99} \Rightarrow$$
$$\omega_{\max} = 3,46 r/s$$

Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος τροχού – σώματος έως ότου χαθεί η επαφή θα είναι $\omega = \omega_{\alpha\rho\chi} + \alpha_\gamma(t-6) \Rightarrow \omega = 0,9 + 0,3(t-6)$

Για ω=3,46r/s ⇒3,46=0,9+0,3(t – 6) ⇒2,56=0,3(t – 6) ⇒2,56=0,3t – 1,8⇒4,36=0,3t ⇒ t=4,36/0,3 ≃14,5s

δ)

● Από (0 – 6)s η γωνιακή επιτάχυνση αυξάνεται γραμμικά δηλ. $\boldsymbol{\alpha_{\gamma,1} = t/20}$

● Από (6 – 14,5) η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή $\boldsymbol{\alpha_{\gamma,2}=0,3\ r/s^2}$

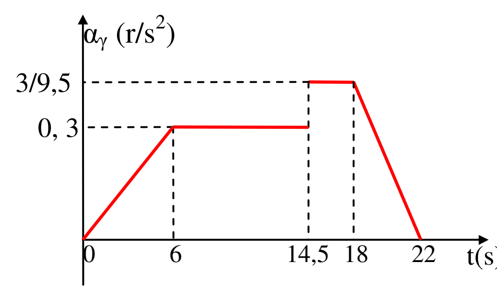
● Από (14,5 – 18)s η ροπή που δέχεται ο τροχός δεν αλλάζει αλλά επειδή εφαρμόζεται μόνο στον τροχό δεδομένου ότι έχει χαθεί η επαφή του σώματος και του τροχού θα αλλάξει η γωνιακή επιτάχυνση.

$\Sigma\tau = I_{\tau\rho}\cdot\alpha_{\gamma,3} \Rightarrow 3=9,5\cdot\alpha'_\gamma \Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha_{\gamma,3} = 3/9.5\ r/s^2}$

● Από (18 – 22)s η γωνιακή επιτάχυνση μειώνεται γραμμικά δηλ. είναι της μορφής
$\alpha_{\gamma,4} = \lambda\cdot(t - t_0) + \beta \Rightarrow \alpha_{\gamma,4} = \lambda\cdot(t - 18) + \beta$
για t=18s η $\alpha_{\gamma,4} = 3/9,5\ r/s^2 \Rightarrow \beta = 3/9,5\ r/s^2$
για t=22s η $\alpha_{\gamma,4} = 0$ αφού η ροπή είναι μηδενική $\Rightarrow 0 = \lambda\cdot(22 - 18) + 3/9,5 \Rightarrow$
$0 = \lambda\cdot 4 + 3/9,5 \Rightarrow -4\lambda = 3/9,5 \Rightarrow \lambda' = -3/38\ r/s^3$

$$\alpha_{\gamma,4} = -\frac{3}{38}(t-18) + \frac{3}{9,5}$$

Από το εμβαδό του διαγράμματος βρίσκουμε τη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας, Δω.
$\Delta\omega_{(0\text{-}22)s} = \text{Εμβ}_{,\tau\rho.(0\text{-}14,5)} + \text{Εμβ}_{,\tau\rho.(14,5\text{-}22)} \Rightarrow$
$\Delta\omega_{(0\text{-}22)s} = \text{Εμβ}_{,\tau\rho.(0\text{-}14,5)} + \text{Εμβ}_{,\tau\rho.(14,5\text{-}22)} \Rightarrow$
$\Delta\omega_{(0\text{-}22)s} = 3,45 + 33/19 \Rightarrow$
$\Delta\omega_{(0\text{-}22)s} = 98,55/19 \Rightarrow \Delta\omega_{(0\text{-}22)} = 5,18r/s \Rightarrow$
$\omega_{22s} - \omega_{0s} = 5,18r/s \Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega_{22s}=5,18r/s}$



Σχόλιο

Λόγω της προσέγγισης t=4,36/0,3 ≃14,5s το εμβαδό από (0–14,5)s θα έπρεπε να ήταν 3,46r/s όση και η ταχύτητα του τροχού την στιγμή που χάνεται η επαφή των σωμάτων.

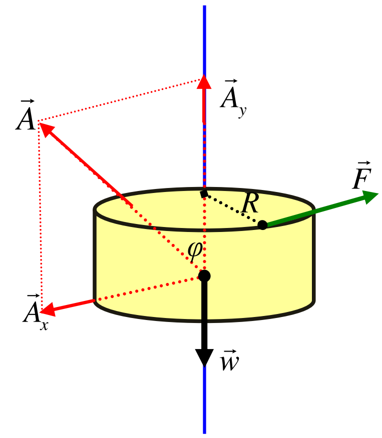
ε) Επειδή ο άξονας περνά από το κέντρο μάζας του τροχού και το κέντρο μάζας παραμένει ακίνητο θα ισχύει ΣF=0. Ο άξονας περιστροφής ασκεί στον κύλινδρο δύναμη $\vec{A}$ τέτοιου μέτρου και διεύθυνσης ώστε σε κάθε άξονα κάθε χρονική στιγμή να ισχύει $\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow A_x = F$ και $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow A_y = w$.

Η δύναμη του άξονα A_x στο επίπεδο της δύναμης F και η δύναμη F αποτελούν ζεύγος δυνάμεων!

Για t=20s:

$$\alpha_{\gamma,4} = -\frac{3}{38}(20-18)+\frac{3}{9,5} \Rightarrow \alpha_{\gamma,4} = -\frac{6}{38}+\frac{3}{9,5} = -\frac{3}{19}+\frac{3}{9,5} = \frac{3}{19} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma,4} = \frac{3}{19} r/s^2$$



$$\Sigma\tau = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow FR = 9,5 \cdot \frac{3}{19} \Rightarrow F \cdot 2 = 1,5 N\cdot m \Rightarrow F = 0.75N$$

Έτσι F=A_x=0.75N

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow A_y = w \Rightarrow A_y = 47,5N.$$

Έτσι η δύναμη $\vec{A}$ του άξονα που ασκείται στο κύλινδρο είναι

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{0,75^2 + 47,5^2} = \sqrt{0,5625 + 2256,25} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{2256,8125} = 47.5059N$$

με $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{A_x}{A_y} = \frac{0.75}{47.5}$

Χ. Αγριόδημας