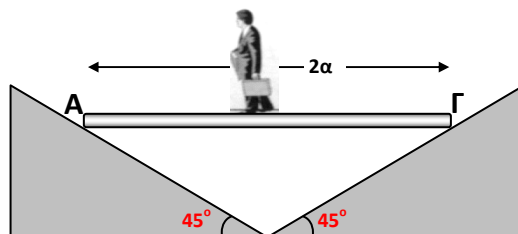


Ισορροπία Ράβδου μέχρι να Ολισθήσει

Ράβδος ΑΓ, μήκους $L=2a$ και αμελητέου βάρους στηρίζεται οριζόντια μεταξύ δύο κεκλιμένων επιπέδων της ίδιας γωνίας κλίσης 45° , όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο μέσο της ράβδου βρίσκεται ένας άνθρωπος, βάρους W , ο οποίος αρχίζει να κινείται προς το ένα άκρο της. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ της ράβδου και των κεκλιμένων επιπέδων είναι $\mu=0,5$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.



α) Είναι σωστή η έκφραση «στη ράβδο ασκείται το βάρος του ανθρώπου»;

β) Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση σε συνάρτηση με το a που μπορεί να περπατήσει ο άνθρωπος στην ράβδο μέχρι να ξεκινήσει η ολίσθηση.

Ο άνθρωπος κάνει μικρά βηματάκια και σταματά συνεχώς. Έτσι να μη ληφθεί υπόψη η στατική τριβή που εμφανίζεται μεταξύ του ανθρώπου και της ράβδου καθώς κινείται ο άνθρωπος.

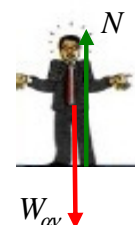
Απάντηση

α) Από την ισορροπία του ανθρώπου στον κατακόρυφο άξονα προκύπτει $w_{av}=N$.

$$\Sigma F=0 \Rightarrow w_{av} - N=0 \Rightarrow w_{av} = N$$

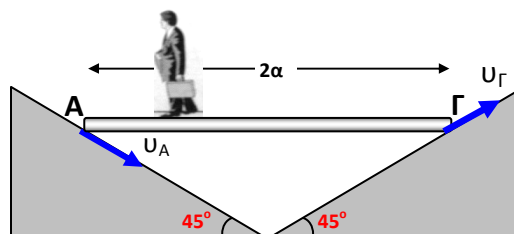
Ο άνθρωπος ασκεί μία δύναμη στο δάπεδο N' η οποία λόγω δράσης – αντίδρασης έχει ίδιο μέτρο με αυτή που δέχεται αυτός από το δάπεδο και αντίθετη φορά, δηλ. $|N'|=|N|$.

Η έκφραση στο δάπεδο ασκείται το βάρος του ανθρώπου είναι **λανθασμένη!** Έτσι λέμε ότι στη ράβδο ασκείται μία δύναμη επαφής από τον άνθρωπο η οποία είναι ίση με το βάρος αυτού διότι αυτός ισορροπεί.



β) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι οι δυνάμεις επαφής F_A και F_Γ στα σημεία Α και Γ της ράβδου οι οποίες είναι υπό γωνία. Επιπλέον και μία δύναμη επαφής που ασκεί ο άνθρωπος στη ράβδο, η οποία αριθμητικά είναι ίση με το βάρος του ανθρώπου δηλ. $F_{av}=w_{av}$

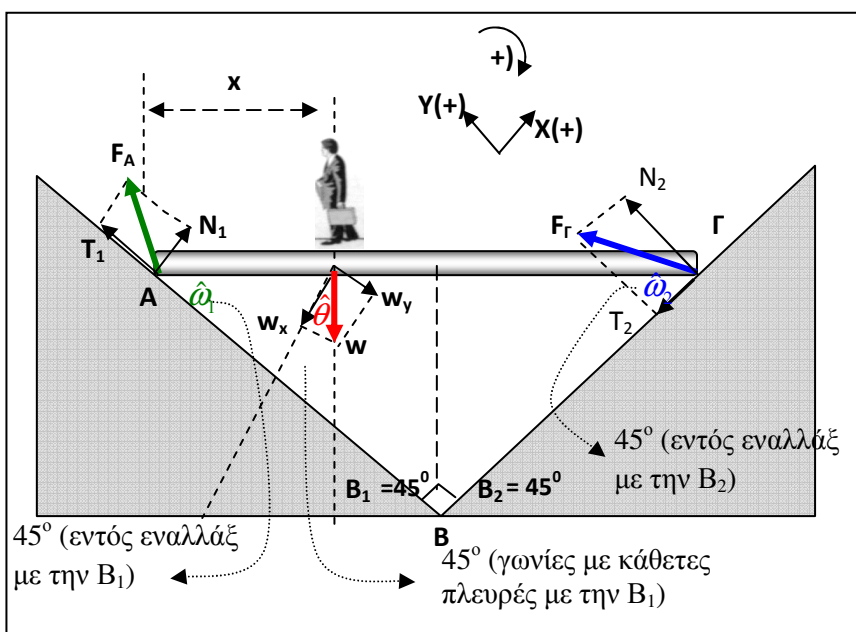
Έστω ότι ο άνθρωπος πηγαίνει προς το άκρο Α. Όταν επίκειται να γίνει ολίσθηση τα σημεία Α και Γ θα κινηθούν όπως στο σχήμα. Οι τριβές ολίσθησης στα Α και Γ θα είναι αντίθετες από την ταχύτητα στα Α και Γ.



γ) Αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό σε άξονες παράλληλους και κάθετους στα κεκλιμένα επίπεδα.

Οι γωνίες 45° δεν είναι τυχαίες γιατί όταν γίνεται η παραπάνω ανάλυση σχηματίζεται ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι κάθετες μεταξύ τους. Έτσι η κάθετη δύναμη N_2 στην ΒΓ θα είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΒ και συνεπώς οι δυνάμεις T_1 και N_2 είναι παράλληλες. Ακριβώς ανάλογα και η T_2 είναι παράλληλη με



την N_1 .

$$\vec{T}_1 \parallel \vec{N}_2 \text{ και } \vec{T}_2 \parallel \vec{N}_1$$

Οριακά θα έχουμε ισορροπία λίγο πριν γίνει η ολίσθηση. Η στατική τριβή έχει αντίθετη φορά από τη φορά της ολίσθησης που θα έχει το σώμα όταν ολισθήσει.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - W_y + T_1 = 0 \Rightarrow N_2 - W \frac{\sqrt{2}}{2} + \mu N_1 = 0 \Rightarrow N_2 - W \frac{\sqrt{2}}{2} + 0,5N_1 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -T_2 - W_x + N_1 = 0 \Rightarrow -\mu N_2 - W \frac{\sqrt{2}}{2} + N_1 = 0 \Rightarrow -0,5N_2 - W \frac{\sqrt{2}}{2} + N_1 = 0 \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \frac{3}{2}N_2 - \frac{N_1}{2} = 0 \Rightarrow 3N_2 = N_1 \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow{(3)} N_2 + \frac{3}{2}N_2 - W \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_2 = W \frac{\sqrt{2}}{5} \quad (4)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$

$$\eta\mu\omega_1 = B\Gamma / A\Gamma \Rightarrow B\Gamma = \alpha\sqrt{2}$$

$$\eta\mu\omega_2 = AB / A\Gamma \Rightarrow AB = \alpha\sqrt{2}$$

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow w \cdot x + T_2 \cdot AB - N_2 \cdot \Gamma B = 0 \quad \xrightarrow{AB=\Gamma B=\alpha\sqrt{2}} \Rightarrow$$

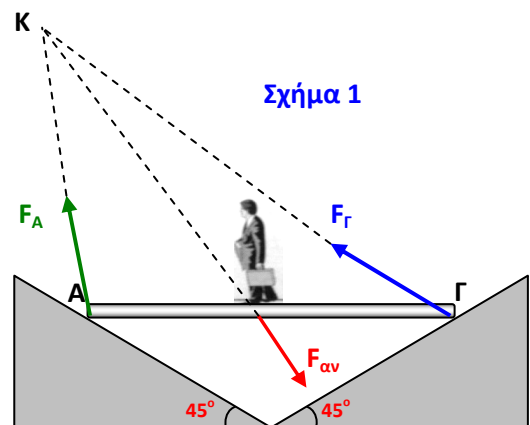
$$w \cdot x + \mu \cdot N_2 \cdot \alpha\sqrt{2} - N_2 \cdot \alpha\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$

$$w \cdot x - 0,5N_2 \cdot \alpha\sqrt{2} = 0 \xrightarrow{(4)} x = \frac{a}{5}$$

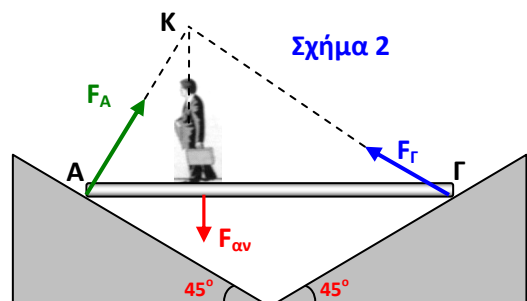
Αφού ξεκίνησε από τη μέση θα διανύσει $(a - a/5) = 4a/5$

Παρατήρηση

Η ράβδος ισορροπεί με την επίδραση τριών δυνάμεων. Μην λαμβάνοντας την στατική τριβή υπόψη τότε οι φορείς των δυνάμεων δεν τέμνονται. Εάν όμως λάβουμε την στατική τριβή υπόψη οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι έτσι ώστε να ικανοποιείται η απαίτηση αυτή. (σχήμα 1)



Επιπλέον στο πρόβλημα έχουμε θεωρήσει την εξής κατάσταση: ο άνθρωπος περπατά σιγά σιγά και σταματά. Σε κάθε τέτοια κατάσταση έχουμε το σχήμα 2. Μόλις η ράβδος τείνει να ολισθήσει τότε οι δυνάμεις είναι όπως στο σχήμα που έχουμε στην λύση της άσκησης, ενώ αν λάβουμε και την στατική τριβή είναι αυτό του σχήματος 1



X. Αγκιόδημας