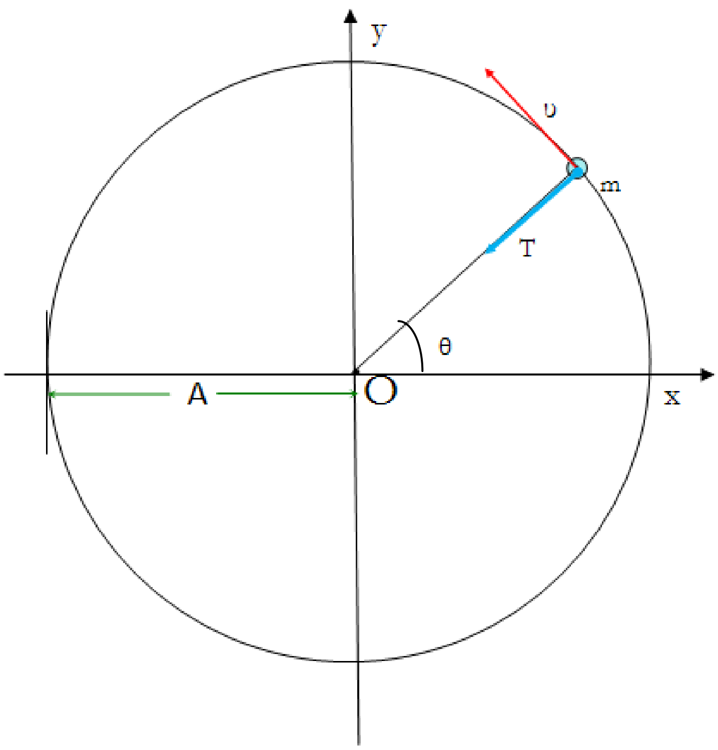
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τη σχέση (από την πλευρά της δυναμικής) που υπάρχει ανάμεσα στην απλή αρμονική ταλάντωση και στην ομαλή κυκλική κίνηση. Η αποδοχή της εξίσωσης:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{(δεύτερος νόμος του Newton)} \qquad (1)$$

σημαίνει ότι η ίδια κίνηση προϋποθέτει την ίδια δύναμη που την προκαλεί, όποια κι'αν είναι η προέλευση αυτής της δύναμης. Η «ισοδυναμία» ανάμεσα στις δύο κινήσεις (απλή αρμονική ταλάντωση και ομαλή κυκλική κίνηση) μπορεί να γίνει αντιληπτή από το παρακάτω σχήμα 1. Ένα σωματίδιο μάζας m, κινείται πάνω στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας $R = A$, μέσω ενός νήματος που είναι στερεωμένο στο κέντρο O του κύκλου. Αν το σωματίδιο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ, η τάση T του νήματος θα είναι:

$$T = m\frac{\upsilon^2}{A} \qquad (2)$$



Σχήμα 1

Στη σχέση (2), $\frac{\upsilon^2}{A}$ είναι το μέτρο της (στιγμιαίας) επιτάχυνσης a_T, του σωματιδίου, η οποία κατευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου.

Κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να αναλύσουμε τη δύναμη και την επιτάχυνση σε δύο συνιστώσες, σ'ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.Θεωρώντας λοιπόν τις συνιστώσες στον άξονα των x, έχουμε:

$$F_x = -T\cos\theta = -\frac{m\upsilon^2}{A}\cos\theta \tag{3}$$

$$a_x = -\frac{\upsilon^2}{A}\cos\theta \tag{4}$$

Για να δείξουμε την «ταύτιση» αυτής της συνιστώσας κίνησης με την απλή αρμονική ταλάντωση, εισάγουμε την γωνιακή ταχύτητα ω, οπότε: $\upsilon = \omega A$ και έχουμε:

$$F_x = -m\omega^2 A\cos\theta = -m\omega^2 x \tag{5}$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos\theta = -\omega^2 x \tag{6}$$

Η εξίσωση (5) παραπέμπει στη δύναμη επαναφοράς ελατηρίου (νόμος Hooke). Με τη βοήθεια της (6) μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{7}$$

Η εξίσωση (7) είναι η γνωστή μας διαφορική εξίσωση που περιγράφει την απλή αρμονική ταλάντωση και δέχεται σαν γενική λύση:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (8),$$

όπου:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (9),$$

και:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{10}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η αντιστοιχία είναι πλήρης από κάθε άποψη. Και μάλιστα μπορούμε αν θέλουμε να δούμε και τα πράγματα με άλλη σειρά και να θεωρήσουμε την ομαλή κυκλική κίνηση σαν την «υπέρθεση» δύο κάθετων απλών αρμονικών ταλαντώσεων (με διαφορά φάσης π/2).

Η παραπάνω εργασία βασίσθηκε κυρίως στο βιβλίο του **A. P. French**: ***Newtonian Mechanics***, The M.I.T. Introductory Physics series, W. W. Norton &Company, 1971.

Ευχαριστώ πολύ το **Διονύση Μάργαρη** για την παραχώριση του αρχείου σχημάτων.

Φιορεντίνος Γιάννης

ΑΘΗΝΑ

ΟΚΤΩΒΡΗΣ 2011