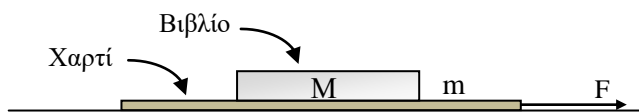


Βιβλίο- Χαρτί

Ένα βιβλίο μάζας M βρίσκεται ακίνητο πάνω σε ένα μακρύ τραπέζι, μεταξύ του τραπεζιού και του βιβλίου υπάρχει ένα χαρτί μάζας $m=0,1M$. Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ του βιβλίου και του χαρτιού είναι ίδιος με αυτόν μεταξύ χαρτιού και τραπεζιού και ισούται με $\mu=0,1$. Ασκούμε στο χαρτί μια οριζόντια δύναμη F όπως στο σχήμα.



α) Ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο της δύναμης F έτσι ώστε να έχουμε οποιαδήποτε κίνηση των σωμάτων.

β) Για ποια τιμή της F θα έχουμε αποχώρηση του βιβλίου από το χαρτί;

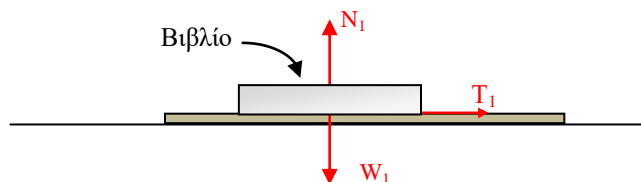
Θεωρήστε γνωστά το M και το g .

Επίσης θεωρήστε ότι η τιμή του οριακού συντελεστή στατικής τριβής ισούται με το συντελεστή τριβής ολίσθησης.

Απάντηση:

Σχεδιάζουμε δυνάμεις σε κάθε σώμα ξεχωριστά.

Στο βιβλίο ασκούνται οι παρακάτω δυνάμεις.

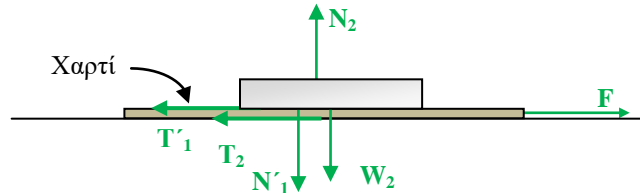


Όπου T_1 είναι η δύναμη τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ του βιβλίου και του χαρτιού. Όσο το βιβλίο και το χαρτί βρίσκονται σε σχετική ακινησία πρόκειται για τη στατική τριβή $T_{s(1)}$, ενώ όταν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ του βιβλίου και του χαρτιού πρόκειται για την τριβή ολίσθησης $T_{ολ(1)}$.

Η στατική τριβή παίρνει τιμές $0 \leq T_{s(1)} \leq \mu N_1 \xrightarrow{\Sigma F_y=0 \rightarrow N_1=Mg} 0 \leq T_{s(1)} \leq \mu \cdot M \cdot g$

Ενώ η τριβή ολίσθησης έχει σταθερό μέτρο $T_{ολ(1)} = \mu N_1 \rightarrow T_{ολ(1)} = \mu \cdot M \cdot g$

Στο χαρτί ασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις.



Όπου T_1' είναι η αντίδραση της T_1 , N_1' η αντίδραση της N_1 και T_2 η δύναμη τριβής μεταξύ του βιβλίου και του δαπέδου. Όσο το χαρτί είναι ακίνητο πάνω στο τραπέζι πρόκειται και την στατική τριβή $T_{S(2)}$, ενώ όταν το χαρτί κινείται σε σχέση με το τραπέζι πρόκειται για την τριβή ολίσθησης $T_{Oλ.(2)}$.

Εφαρμόζοντας το 1^ο Νόμο του Νεύτωνα στον κατακόρυφο άξονα για το χαρτί έχουμε.

$$\Sigma F_{2(y)} = 0 \rightarrow N_2 = N_1' + w_2 \rightarrow N_2 = Mg + mg \xrightarrow{m=0,1M} N_2 = 1,1Mg$$

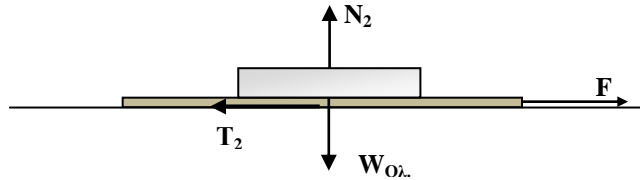
Η στατική τριβή μεταξύ του χαρτιού και του δαπέδου παίρνει τιμές:

$$0 \leq T'_{S(2)} \leq \mu N_2 \rightarrow 0 \leq T'_{S(2)} \leq 1,1\mu Mg$$

Ενώ η τριβή ολίσθησης μεταξύ του χαρτιού και του τραπεζιού είναι:

$$T_{Oλ.(2)} = \mu N_2 \rightarrow T_{Oλ.(2)} = 1,1\mu Mg$$

α) Αν θεωρήσουμε και τα δύο σώματα ως ένα τότε οι δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι:



Για να κινηθεί το σύστημα των δύο σωμάτων θα πρέπει $F \geq T_{S(2)\max} \rightarrow F \geq 1,1\mu Mg$

Άρα η μικρότερη τιμή της F που θα προκαλέσει τη κίνηση των σωμάτων ως ένα σώμα είναι:

$$F_{\min} = 1,1\mu Mg \xrightarrow{\mu=0,1} F_{\min} = 0,11Mg$$

β) Εφαρμόζοντας το 2^ο Νόμο του Νεύτωνα για το βιβλίο έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\alpha \rightarrow T_1 = M\alpha \quad (\text{Σχέση 1})$$

Όμως η $T_1 \leq T_{S(1)\max} \rightarrow T_1 \leq \mu Mg$ οπότε η επιτάχυνση που μπορεί να αποκτήσει το βιβλίο είναι:

$$M\alpha \leq \mu Mg \rightarrow \alpha \leq \mu g$$

Άρα η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να αποκτήσει το βιβλίο είναι $\alpha_{\max} = \mu g$.

Αν το χαρτί κινηθεί με επιτάχυνση μεγαλύτερη από το $\alpha_{\max} = \mu g$ το βιβλίο δεν μπορεί να ακολουθήσει το χαρτί και έτσι θα αποχωριστεί από το βιβλίο.

Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα και για το χαρτί έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow F - T_1 - T_2 = m\alpha \quad (\text{Σχέση 2})$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις 1 και 2 έχουμε:

$$F - T_2 = (M + m)\alpha \rightarrow F - 1,1\mu Mg = (M + m)\alpha \rightarrow F - 1,1\mu Mg = 1,1M\alpha \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{F - 1,1\mu Mg}{1,1M}$$

Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης που τα δύο σώματα κινούνται μαζί είναι η $\alpha_{\max} = \mu g$.

Αποχώρηση των δύο σωμάτων θα έχουμε όταν $\alpha \geq \alpha_{\max}$:

$$\alpha \geq \alpha_{\max} \rightarrow \frac{F - 1,1\mu Mg}{1,1M} \geq \mu g \rightarrow F - 1,1\mu Mg \geq 1,1\mu Mg \rightarrow F \geq 2,2\mu Mg \rightarrow$$

$$F \geq 2,2\mu Mg \xrightarrow{\mu=0,1} F \geq 0,22Mg$$

β τρόπος .

Εφαρμόζουμε 2^ο Νόμο για το σύστημα των μαζών.

$$\Sigma \vec{F}_x = m_{\text{ολ.}} \vec{\alpha} \rightarrow F - T_2 = m_{\text{ολ.}} \alpha \rightarrow F - \mu N_2 = (m + M)\alpha \rightarrow F - \mu(m + M)g = (m + M)\alpha \xrightarrow{m=0,1M} \rightarrow$$

$$F - 1,1\mu Mg = 1,1M\alpha \rightarrow \alpha = \frac{F - 1,1\mu Mg}{1,1M}$$

Για να έχω οπουδήποτε κίνηση αλλά όχι αποχώρηση των σωμάτων πρέπει να ισχύει:

$$0 \leq \alpha \leq \mu g \rightarrow$$

$$0 \leq \frac{F - 1,1\mu Mg}{1,1M} \leq \mu g \rightarrow 0 \leq F - 1,1\mu Mg \leq 1,1\mu Mg \rightarrow$$

$$1,1\mu Mg \leq F \leq 2,1\mu Mg \xrightarrow{\mu=0,1} \rightarrow$$

$$0,11Mg \leq F \leq 0,21Mg$$