

Πλαστικό Καλαμάκι- Ημισφαιρικό Ποτήρι

Ένα πλαστικό καλαμάκι μήκους L τοποθετείται σε ένα λείο ημισφαιρικό ποτήρι ακτίνας R το οποίο ισορροπεί πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι.

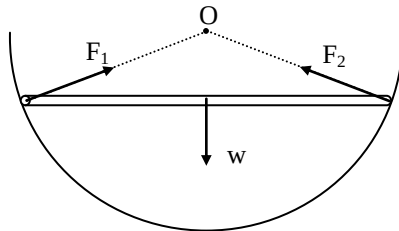
Να βρεθεί σε ποια θέση το καλαμάκι θα ισορροπεί, χωρίς να πέφτει από το ποτήρι.

α) Αν το μήκος (L) είναι μικρότερο από $2R$.

β) Αν το μήκος (L) είναι μεγαλύτερο από $2R$.

Απάντηση:

α) Αν το μήκος (L) από το καλαμάκι είναι μικρότερο από $2R$ τότε αυτό θα ισορροπεί οριζόντια.

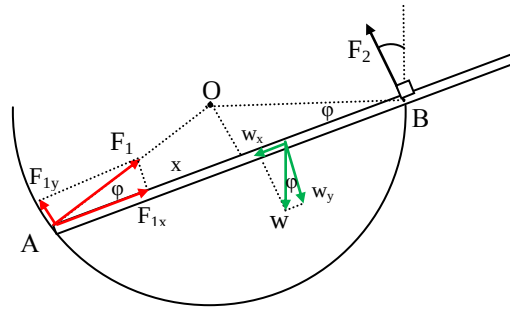


Οι δυνάμεις από τα δύο τοιχώματα του λείου ημισφαιρίου είναι κάθετες στην επιφάνεια του ποτηριού, άρα είναι ακτινικές (περνούν από το κέντρο O). Αφού το καλαμάκι ισορροπεί θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς το O να είναι μηδέν:

$$\Sigma \vec{\tau}_O = 0 \rightarrow \vec{\tau}_{F_1} + \vec{\tau}_{F_2} + \vec{\tau}_w = 0 \rightarrow \vec{r}_{F_1} + \vec{r}_{F_2} + \vec{\tau}_w = 0 \rightarrow \vec{\tau}_w = 0$$

Άρα η διεύθυνση του βάρους θα περνάει υποχρεωτικά από το κέντρο O .

β) Αν το μήκος (L) από το καλαμάκι είναι μεγαλύτερο από 2R, αλλά δεν πέφτει από το ποτήρι.



$$\vec{\Sigma F}_x = 0 \rightarrow F_{1x} = w_x \rightarrow F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = w \cdot \eta\mu\varphi \rightarrow F_1 = \frac{w \cdot \eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (\text{Σχέση 1})$$

$$\vec{\Sigma F}_y = 0 \rightarrow F_{1y} + F_2 = w_y \rightarrow F_1 \eta\mu\varphi + F_2 = w \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \quad (\text{Σχέση 2})$$

$$\vec{\Sigma \tau}_A = 0 \rightarrow w_y \cdot \frac{L}{2} = F_2 \cdot 2x \rightarrow w_y \cdot \frac{L}{2} = F_2 \cdot 2 \cdot R \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow w \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \frac{L}{2} = F_2 \cdot 2 \cdot R \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow$$

$$F_2 = \frac{w \cdot L}{4 \cdot R} \quad (\text{Σχέση 3})$$

Αντικαθιστούμε τις (Σχέσεις 1,3) στη (Σχέση 2).

$$\frac{w \cdot \eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \eta\mu\varphi + \frac{w \cdot L}{4 \cdot R} = w \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow w \cdot \eta\mu\varphi^2 + \frac{w \cdot L}{4 \cdot R} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = w \cdot \sigma\upsilon\nu^2\varphi \xrightarrow{\eta\mu^2\varphi=1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

$$w \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu\varphi^2) + \frac{w \cdot L}{4 \cdot R} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = w \cdot \sigma\upsilon\nu^2\varphi \rightarrow 4Rw(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi^2) + wL\sigma\upsilon\nu\varphi = 4Rw\sigma\upsilon\nu^2\varphi$$

$$4Rw - 4Rw\sigma\upsilon\nu\varphi^2 + wL\sigma\upsilon\nu\varphi = 4Rw\sigma\upsilon\nu^2\varphi \rightarrow 8Rw\sigma\upsilon\nu^2\varphi - wL\sigma\upsilon\nu\varphi - 4Rw = 0 \rightarrow$$

$$8R\sigma\upsilon\nu^2\varphi - L\sigma\upsilon\nu\varphi - 4R = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση προκύπτει τριώνυμο ως προς $\sigma\upsilon\nu\varphi$.

$$\Delta = L^2 + 128R^2$$

οι λύσεις του τριωνύμου είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{L + \sqrt{L^2 + 128R^2}}{16R} = \frac{L + \sqrt{L^2 + 128R^2}}{16R} \quad \text{δεκτή λύση.}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{L - \sqrt{L^2 + 128R^2}}{16R} = \frac{L - \sqrt{L^2 + 128R^2}}{16R} \quad \text{η λύση αυτή απορρίπτεται γιατί βγάζει } \sigma\upsilon\nu\varphi < 0$$

οπότε η γωνία φ είναι αμβλεία, από σχήμα αυτό δεν είναι δυνατόν να γίνει.