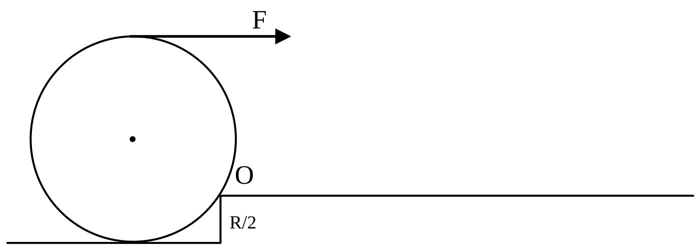
Κύλινδρος- Πεζοδρόμιο-Δύναμη F

Κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R βρίσκεται ακίνητος πάνω σε οριζόντιο επίπεδο μπροστά από ένα πεζοδρόμιο ύψους R/2 (βλέπε σχήμα). Ένα παιδί που βρίσκεται πάνω στο πεζοδρόμιο τραβάει σιγά-σιγά με τη βοήθεια ενός οριζόντιου σχοινιού που δεμένο στην περιφέρεια του, τον κύλινδρο, ασκώντας σε αυτόν οριζόντια δύναμη F.



α) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της οριζόντιας δύναμης που πρέπει να ασκηθεί έτσι ώστε ο κύλινδρος να υπερπηδήσει το πεζοδρόμιο. (Κατά τη διαδικασία της ΄ανόδου΄ του κυλίνδρου στο πεζοδρόμιο η κίνηση γίνεται σιγά–σιγά.)

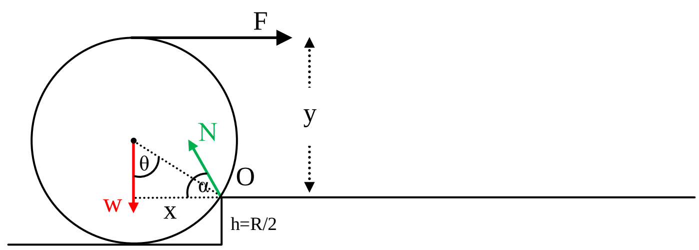
β) Να υπολογιστεί το μέγεθος και η κατεύθυνση της δύναμης (N) που δέχεται ο κύλινδρος από την άκρη (O) του πεζοδρομίου .

γ) Αν η δύναμη F δεν είναι οριζόντια αλλά σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία φ, για ποια τιμή της φ απαιτείται η ελάχιστη δύναμη F για υπερπηδήσει ο κύλινδρος το πεζοδρόμιο; Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της δύναμης στην περίπτωση αυτή;

Να θεωρήσετε ότι σχοινί δεν ολισθαίνει πάνω στην περιφέρεια του κυλίνδρου.

Απάντηση:

Για να υπερπηδήσει ο κύλινδρος το πεζοδρόμιο θα πρέπει πρώτα να χάσει την επαφή του με το δάπεδο, άρα οι δυνάμεις που δέχεται ο κύλινδρος είναι η εξωτερική δύναμη F, το βάρος w και μια δύναμη (N) από το σημείο O. Κατά τη διαδικασία της ανόδου ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από το σημείο O. Η ροπή της δύναμης (F) είναι αυτή που βοηθάει τον κύλινδρο να ανεβεί ενώ η ροπή του βάρους (w) αντιστέκεται.



Κατά τη διαδικασία της ανόδου ισχύει ότι $\Sigma\vec{F}=0$ και $\Sigma\vec{\tau}_{(O)}=0$. Με απλή γεωμετρία προκύπτει ότι η γωνία $\theta=60^o$ ($\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{R-h}{R}=\frac{R-R/2}{R}=\frac{1}{2}\rightarrow\theta=60^o$).

$$\Sigma\vec{\tau}_O=0\rightarrow\tau_F=\tau_w\rightarrow F\cdot y=W\cdot x\rightarrow F(R+R/2)=w\cdot R\cdot\eta\mu 60^0\rightarrow F\frac{3R}{2}=w\frac{\sqrt{3}\cdot R}{2}\rightarrow$$

$$F=\frac{\sqrt{3}\cdot m\cdot g}{3}$$

Κατά τη διαδικασία της ανόδου ο μοχλοβραχίονας της F μεγαλώνει , ενώ ο μοχλοβραχίονας του βάρους μικραίνει, άρα η μικρότερη δύναμη που απαιτείται είναι η $F_{min}=\frac{\sqrt{3}\cdot m\cdot g}{3}$.

β)

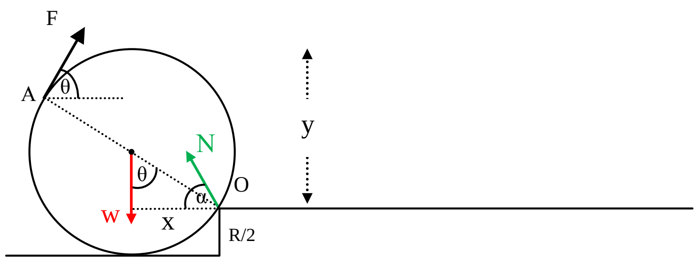
$$\Sigma F=0\rightarrow\begin{cases}\Sigma F_x=0\rightarrow F=N_x\rightarrow F=N\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\\ \Sigma F_y=0\rightarrow w=N_y\rightarrow w=N\cdot\eta\mu\alpha\end{cases}$$

Διαιρώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{N\cdot\eta\mu\alpha}{N\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{w}{F}\xrightarrow{F=\frac{\sqrt{3}mg}{3}}\varepsilon\varphi\alpha=\frac{m\cdot g}{\frac{\sqrt{3}mg}{3}}\rightarrow\varepsilon\varphi\alpha=\frac{3}{\sqrt{3}}\rightarrow\varepsilon\varphi\alpha=\sqrt{3}$$

Άρα $\alpha=60^o$.

γ) Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να έχουμε το μέγιστο μοχλοβραχίονα. Άρα το σημείο εφαρμογής (Α) της δύναμης θα πρέπει να είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Ο. Ενώ η διεύθυνση της δύναμης πρέπει να είναι κάθετη στη διάμετρο ΟΑ (βλέπε σχήμα).



Η γωνία που σχηματίζει η F με τον ορίζοντα είναι ίση με τη γωνία $\theta = 60^o$. Οι δύο γωνίες θ (βλέπε σχήμα) είναι γωνίες (οξίες) με κάθετες πλευρές άρα είναι ίσες.

Για να υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή της δύναμης F, εφαρμόζουμε $\Sigma\vec{\tau}_O = 0$.

$$\Sigma\vec{\tau}_O = 0 \to \vec{\tau}_F = \vec{\tau}_w \to F \cdot 2R = w \cdot x \to F \cdot 2R = w \cdot R \cdot \eta\mu\theta \to F \cdot 2R = w \cdot R \cdot \eta\mu 60^o \to$$

$$F \cdot 2R = \frac{w \cdot R\sqrt{3}}{2} \to F_{min.} = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot g}{4}$$