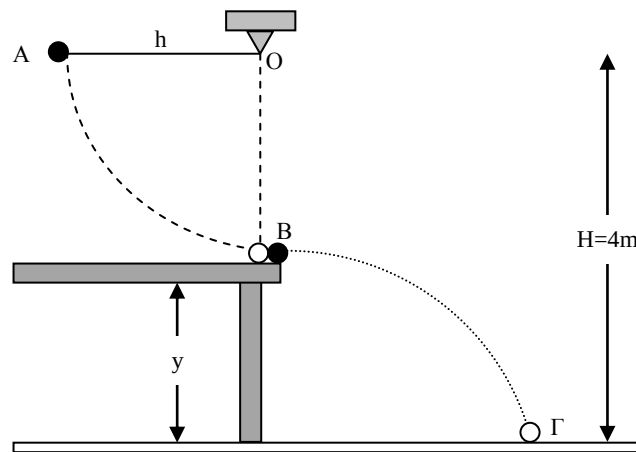


Μήκος Νήματος – Μέγιστο Βεληνεκές.

Μια μικρή σφαίρα μάζας m είναι δεμένη στο άκρο ενός νήματος το μήκος του οποίου μπορεί να μεταβληθεί, το άλλο άκρο του νήματος βρίσκεται σε σημείο O της οροφής ενός εργαστηρίου το οποίο απέχει από το έδαφος $4m$. Το νήμα μπορεί να περιστραφεί γύρω από το σημείο O χωρίς τριβές. Στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και πάνω σε ένα τραπέζι το ύψος του οποίου επίσης μπορεί να μεταβληθεί βρίσκεται μια άλλη όμοια σφαίρα. Ρυθμίζουμε κατάλληλα τόσο το μήκος του νήματος όσο και το ύψος του τραπεζιού, έτσι ώστε τα δύο σώματα να συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά όταν το νήμα γίνεται κατακόρυφο.



- α) Το βρεθεί το μήκος που πρέπει να έχει το νήμα καθώς και το ύψος του τραπεζιού ώστε μετά την κρούση η δεύτερη σφαίρα να διανύσει το μέγιστο βεληνεκές.
- β) Ποια από τις δύο σφαίρες κινήθηκε για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα;
- γ) Ποια από τις δύο σφαίρες διένυσε μεγαλύτερη απόσταση;

Υποθέστε ότι κατά την κίνηση της πρώτης σφαίρας το νήμα είναι πάντα τεντωμένο, δεν έχουμε αντίσταση αέρα κατά την κίνηση των σφαιρών και ότι $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

α) Έστω h το μήκος του νήματος που έχει η πρώτη σφαίρα, το μήκος y του τραπεζιού θα ισούται με $y=4-h$. (S.I.). Κατά την κίνηση της πρώτης σφαίρας και μέχρι να συγκρουστεί με την δεύτερη ασκούνται μόνο η τάση του νήματος και το βάρος της.

Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από την αρχική θέση μέχρι τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο έχουμε:

$$W_{O\lambda} = K_{Te\lambda} - K_{Ap\chi} \rightarrow \cancel{W_T} + W_B = K_{Te\lambda} - \cancel{K_{Ap\chi}} \rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική ελαστική και έχουν τις ίδιες μάζες ανταλλάσσουν ταχύτητες, οπότε η πρώτη σφαίρα παραμένει ακίνητη ενώ η δεύτερη εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα $v_0 = \sqrt{2gh}$.

Έστω s το βεληνεκές της δεύτερης σφαίρας και t_2 ο χρόνος κίνησης της, από του τύπους της οριζόντιας βολής έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} s &= v_0 t_2 \rightarrow t_2 = \frac{s}{v_0} \\ y &= \frac{gt_2^2}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow y = \frac{g \cdot s^2}{2 \cdot v_0^2} \xrightarrow{v_0 = \sqrt{2gh} \text{ και } y=4-h} 4-h = \frac{g \cdot s^2}{4 \cdot g \cdot h}$$

$$16 \cdot g \cdot h - 4 \cdot g \cdot h^2 = g \cdot s^2 \rightarrow 16 \cdot h - 4 \cdot h^2 = s^2 \rightarrow$$

$$4 \cdot h^2 - 16 \cdot h + s^2 = 0 \quad (\text{σχέση 1})$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι τριώνυμο με άγνωστο το h .

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \rightarrow \Delta = \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \rightarrow \Delta = 16^2 - 16s^2 \rightarrow \Delta = 256 - 16s^2$$

Για να έχει λύση το τριώνυμο θα πρέπει $\Delta \geq 0 \rightarrow 256 - 16s^2 \geq 0 \rightarrow 256 \geq 16s^2 \rightarrow s^2 \leq 16 \rightarrow s \leq 4\text{m}$

Άρα το η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το βεληνεκές είναι $s_{\max}=4\text{m}$.

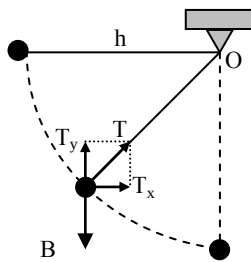
Επιστρέφοντας στη (σχέση 1) έχουμε:

$$4 \cdot h^2 - 16 \cdot h - 4^2 = 0 \rightarrow (2h - 4)^2 = 0 \rightarrow h = 2\text{m}$$

Άρα και το μήκος του νήματος (h) αλλά και το ύψος ($y=4-h$) του τραπεζιού πρέπει να είναι 2m.

β) Η δεύτερη σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα και είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε το χρόνο κίνησης της από τη σχέση:

$$y = \frac{gt_2^2}{2} \rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2y}{g}} \rightarrow t_2 = \sqrt{0,4} \text{ s}$$



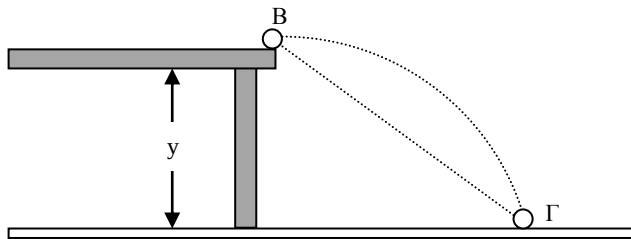
Ο υπολογισμός χρόνου t_1 της πρώτης σφαίρας είναι πολύ δύσκολος μιας και η κίνηση της δεν είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Παρόλα αυτά όμως μπορούμε να συγκρίνουμε τους δύο χρόνους. Και οι δύο σφαίρες διανύουν την ίδια κατακόρυφη απόσταση κατά την κίνηση τους $h=y=2\text{m}$. Η δεύτερη διανύει αυτή την κατακόρυφη απόσταση με επιτάχυνση g αφού στον κατακόρυφο άξονα δέχεται μόνο το βάρος της. Η πρώτη σφαίρα εκτός από το βάρος της στον κατακόρυφο δέχεται και την αντίρροπη κατακόρυφη συνιστώσα του νήματος (T_y), άρα διανύει την ίδια κατακόρυφη απόσταση με μικρότερη επιτάχυνση. Συνεπώς ο χρόνος κίνησης της πρώτης (t_1) είναι μεγαλύτερος από το χρόνο κίνησης της δεύτερης (t_2).

γ) Είναι πού εύκολο να υπολογίσουμε την απόσταση που διανύει η πρώτη σφαίρα αφού εκτελεί κυκλική κίνηση και διαγράφει το $\frac{1}{4}$ της κυκλικής της διαδρομής άρα:

$$s_1 = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi 2}{4} = \pi = 3,14\text{m}$$

Είναι όμως πάρα πολύ δύσκολο να υπολογίσουμε την απόσταση που διανύει η δεύτερη σφαίρα αφού διαγράφει παραβολική κίνηση. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ της αρχικής θέσης (B) και του σημείου πτώσης (Γ) εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα.

$$B\Gamma = \sqrt{y^2 + s_{\max}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4,47\text{m}$$



Το παραβολικό τμήμα της σφαίρας 2 είναι μεγαλύτερο από το (BΓ), ενώ το ευθύγραμμο τμήμα BΓ είναι μεγαλύτερο από το $s_1=3,14\text{m}$, άρα η απόσταση που διανύει η σφαίρα 2 είναι μεγαλύτερη από την απόσταση που διανύει η σφαίρα 1.

Συμπέρασμα η σφαίρα 1 κινείται για περισσότερο χρονικό διάστημα ενώ η σφαίρα 2 διανύει μεγαλύτερη απόσταση.