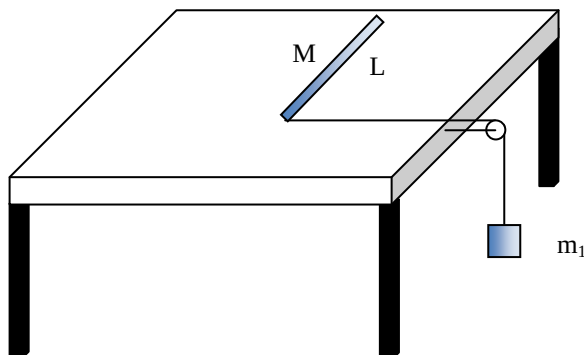


Να βρεθεί ο λόγος M/m_1

Οριζόντια ράβδος μάζας M και μήκους L βρίσκεται ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Οριζόντιο σχοινί είναι δεμένο κάθετα στο ένα άκρο της ράβδου, στο κατακόρυφο τμήμα του σχοινιού και μέσω μιας τροχαλίας έχουμε δέσει σώμα μάζας m_1 , όπως βλέπουμε στο σχήμα. Η μάζα της τροχαλίας και οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.



Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί να υπολογίσετε:

- Την αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου καθώς και την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το σώμα μάζας m_1 την $t=0$.
- Ποιο σημείο της ράβδου έχει εφαπτομενική οριζόντια επιτάχυνση ίση με μηδέν τη στιγμή που το σύστημα αφήνεται ελεύθερο.
- Να βρεθεί ο λόγος των μαζών M/m_1 για τον οποίο το κέντρο μάζας της ράβδου θα κινηθεί με τη μέγιστη επιτάχυνση τη στιγμή που αφήνουμε το σώμα μάζας m_1 .

Απάντηση:

Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα m_1 είναι το βάρος του W_1 και η τάση του νήματος T_1 . Η ράβδος δέχεται, στη διεύθυνση της κίνησης της, μια τάση του νήματος T_2 . Η τροχαλία δέχεται τις δύο τάσεις T_1 και T_2 .

Η μάζα της τροχαλίας είναι αμελητέα, άρα αμελητέα θα είναι και η ροπή αδράνειας της ($I=0$). Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη στροφική κίνηση για την τροχαλία έχουμε:

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma} \rightarrow T_1 r - T_2 r = I \alpha_{\gamma} \xrightarrow{I=0} T_1 r - T_2 r = 0 \rightarrow T_1 = T_2$$

Το σώμα μάζας m_1 εκτελεί μεταφορική επιταχυνόμενη κίνηση.

$$\Sigma F = m_1 a_{cm1} \rightarrow w_1 - T_1 = m_1 a_{cm1} \rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 a_{cm1} \text{ (Σχέση 1)}$$

Η ράβδος εκτελεί σύνθετη επιταχυνόμενη κίνηση, η περιστροφή της οποίας γίνεται γύρω από το κέντρο μάζας της.

$$\Sigma F = M a_{cm2} \rightarrow T_2 = M a_{cm2} \quad (\text{Σχέση 2})$$

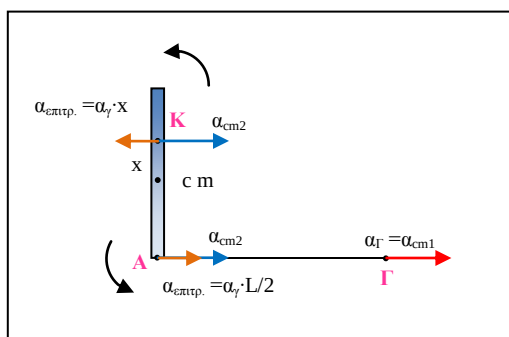
$$\Sigma \tau = I_{cm} \alpha_\gamma \rightarrow T_2 \frac{L}{2} = \frac{ML^2}{12} \alpha_\gamma \rightarrow T_2 = \frac{ML}{6} \alpha_\gamma \quad (\text{Σχέση 3})$$

Από τις σχέσεις 2 και 3 έχουμε:

$$M a_{cm2} = \frac{ML \alpha_\gamma}{6} \rightarrow a_{cm2} = \frac{L \cdot \alpha_\gamma}{6} \rightarrow L \cdot \alpha_\gamma = 6 \cdot a_{cm2} \quad (\text{Σχέση 4})$$

Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας είναι ίδιος για όλα τα σημεία του σχοινιού άρα για τα σημεία του σχοινιού Α και Γ ισχύει:

$$\alpha_\Gamma = \alpha_A \rightarrow \alpha_{cm1} = a_{cm2} + \alpha_\gamma \frac{L}{2} \quad (\text{σχέση 5})$$



Από τις σχέσεις 4 και 5 έχουμε:

$$\alpha_{cm1} = a_{cm2} + \alpha_\gamma \frac{L}{2} \xrightarrow{\alpha_\gamma L = 6 a_{cm2}} \alpha_{cm1} = a_{cm2} + 3 a_{cm2} \rightarrow \alpha_{cm1} = 4 a_{cm2} \quad (\text{Σχέση 6})$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις 1 και 2 έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 g - T_1 = m_1 a_{cm1} \\ T_2 = M a_{cm2} \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} m_1 g = m_1 a_{cm1} + M a_{cm2} \xrightarrow{\alpha_{cm1} = 4 a_{cm2}} m_1 g = m_1 4 a_{cm2} + M a_{cm2} \rightarrow$$

$$\boxed{a_{cm2} = \frac{m_1 \cdot g}{4m_1 + M}}$$

Από τη σχέση 6 μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική επιτάχυνση της μάζας m_1 .

$$\boxed{a_{cm1} = \frac{4 \cdot m_1 \cdot g}{4m_1 + M}}$$

Από σχέση 4 έχουμε ότι:

$$\alpha_{\gamma} = \frac{6 \cdot m_1 \cdot g}{(4m_1 + M)L}$$

β) Κάθε σημείο της ράβδου τη στιγμή της εκκίνησης έχει δύο εφαπτομενικές επιταχύνσεις μια α_{cm2} λόγω της μεταφορικής κίνησης και μία επιτρίχιος επιτάχυνση λόγω της στροφικής κίνησης ($\alpha_{επιτρ\chi}$). Για να είναι η συνολική επιτάχυνση ενός τυχαίου σημείου K μηδέν θα πρέπει αυτές οι δύο επιταχύνσεις του σημείου K να είναι αντίθετες.

Έστω x η απόσταση του ζητούμενου σημείου K από το κέντρο μάζας της ράβδου. Η επιτρίχιος επιτάχυνση του σημείου ισούται $\alpha_{επιτρ.} = \alpha_{\gamma} \cdot x$

$$\alpha_{cm2} = \alpha_{επιτρ.} \rightarrow \alpha_{cm2} = \alpha_{\gamma} x \rightarrow \frac{m_1 \cdot g}{4m_1 + M} = \frac{6 \cdot m_1 \cdot g}{(4m_1 + M)L} \cdot x \rightarrow$$

$$x = \frac{L}{6}$$

γ) Έχουμε υπολογίσει ότι η α_{cm2} της ράβδου δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_{cm2} = \frac{m_1 \cdot g}{4m_1 + M} \rightarrow \alpha_{cm2} = \frac{m_1 \cdot g / m_1}{(4m_1 + M) / m_1} \rightarrow \alpha_{cm2} = \frac{g}{4 + M / m_1}$$

Η τιμή του λόγου M/m_1 για την οποία η α_{cm2} γίνεται μέγιστη όταν $\frac{M}{m_1} \rightarrow 0$ ενώ η μέγιστη τιμή

της α_{cm2} είναι:

$$\alpha_{cm2(max)} = \frac{g}{4}$$