

Ταχύτητα κύματος-Ταχύτητα ταλάντωσης σημείων.

Σημειακή πηγή βρίσκεται στη θέση $x=0$ ενός ελαστικού μέσου και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=A\eta\mu\omega t$ (S.I.), αν η εξίσωση του κύματος που δημιουργείται είναι $y=0,4\eta\mu 2\pi(t/2-x/4)$ S.I, να υπολογίσετε:

α) Την ταχύτητα του κύματος.

β) Τη μέγιστη ταχύτητα των σημείων του ελαστικού μέσου.

γ) Τη ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου Α που βρίσκεται στη θέση $x_A=8\text{m}$ τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$.

δ) Τη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Α ($x_A=8\text{m}$) τη χρονική στιγμή $t_2=5\text{s}$.

ε) Την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Α ($x_A=8\text{m}$), όταν το σημείο Α ταλαντώνεται για χρόνο $\Delta t=0,5\text{s}$.

στ) Την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Α ($x_A=8\text{m}$), όταν απέχει από τη θέση ισορροπίας του απόσταση $0,2\sqrt{2}\text{m}$.

ζ) Την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Α ($x_A=8\text{m}$) μια χρονική στιγμή t , για την οποία ισχύει $U=15K$. Όπου K η κινητική ενέργεια και U η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του σημείου.

η) Την ταχύτητα ταλάντωσης του Α ($x_A=8\text{m}$), μια χρονική στιγμή που το σημείο Β ($x_B=12\text{m}$) κινείται με ταχύτητα $v=0,2\text{m/s}$.

θ) Την ταχύτητα ταλάντωσης του Α ($x_A=8\text{m}$), μια χρονική στιγμή που το σημείο Γ ($x_\Gamma=10\text{m}$) κινείται με ταχύτητα $v=0,3\text{m/s}$.

ι) Την ταχύτητα ταλάντωσης του Α ($x_A=8\text{m}$), μια χρονική στιγμή που το σημείο Δ ($x_\Delta=9\text{m}$) είναι στην ακραία αρνητική του θέση.

κ) Την ταχύτητα ταλάντωσης του Α ($x_A=8\text{m}$), μια χρονική στιγμή που το σημείο Ζ ($x_Z=26/3\text{m}$) είναι στη θέση $y=A/2$ και $v>0$.

Απάντηση:

α) Από την εξίσωση του κύματος έχουμε ότι $f=0,5\text{Hz}$ και $\lambda=4\text{m}$. Η ταχύτητα του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση $v=\lambda \cdot f=4 \cdot 0,5=2\text{m/s}$

β) Από την εξίσωση του κύματος έχουμε επίσης ότι $A=0,4\text{m}$, $\omega=2\pi f=\pi \text{ rad/sec}$, άρα η μέγιστη ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση $v_{\max}=\omega \cdot A=0,4\pi \text{ m/s}$.

γ)

Α τρόπος

Αφού το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα $v=2\text{m/s}$, υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται το σημείο Α ($x_A=8\text{m}$) από τη σχέση $t_0=x_A/v=4\text{s}$, τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$ το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα, άρα το σημείο Α παραμένει ακίνητο και $v_A=0$.

Β τρόπος

Η χρονική στιγμή έναρξης της ταλάντωσης του σημείου Α υπολογίζεται και από τη σχέση $\varphi_A=0$,

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) \rightarrow \varphi_A = 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x_A}{4}\right) \xrightarrow{\varphi_A=0} \frac{t_0}{2} = \frac{x_A}{4} \xrightarrow{x_A=8\text{m}} t_0 = 4\text{s}$$

δ) Η ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v=v_{\max}\sin 2\pi(t/T-x/\lambda) \rightarrow v=0,4\pi \sin 2\pi(t/2-x/4) \xrightarrow{x_A=8\text{m}} v_A = 0,4\pi \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{8}{4}\right) \rightarrow$$

$$v_A = 0,4\pi \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{2} - 2\right) \quad t \geq 4\text{s}$$

άρα τη χρονική στιγμή $t=5\text{s}$ η ταχύτητα του σημείου Α ισούται υπολογίζετε:

$$v_A = 0,4\pi \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{2} - 2\right) \xrightarrow{t=5\text{s}} v_A = 0,4\pi \cdot \sin 2\pi\left(\frac{5}{2} - 2\right) \rightarrow v_A = 0,4\pi \cdot \sin \pi \rightarrow v_A = -0,4\pi \text{ m/s}$$

ε) Α τρόπος.

Αφού το σημείο Α ξεκινά να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_0=4\text{s}$ και ταλαντώνεται για $\Delta t=0,5\text{s}$ τότε η χρονική στιγμή είναι $t=4,5\text{s}$.

$$v_A = 0,4\pi \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{2} - 2\right) \rightarrow v_A = 0,4\pi \cdot \sin 2\pi\left(\frac{4,5}{2} - 2\right) \rightarrow v_A = 0,4\pi \cdot \sin \pi / 2 \rightarrow v_A = 0$$

Το σημείο Α βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης.

Β τρόπος.

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και την εξίσωση $v=v_{\max}\sin \omega \Delta t$ όπου Δt είναι ο χρόνος ταλάντωσης του σημείου Α.

$$v = v_{\max} \sin \omega \Delta t \rightarrow v_A = 0,4\pi \cdot \sin 0,5\pi \rightarrow v_A = 0$$

Γ τρόπος.

Το χρονικό διάστημα $\Delta t = 0,5\text{s}$, ισούται με $T/4$, το σημείο Α ξεκινά την ταλάντωση του από τη θέση ισορροπίας, άρα σε $T/4$ βρίσκεται σε ακραία θέση, οπότε $v_A = 0$.

στ) Από ΑΔΕΤ έχουμε: $E = K + U \rightarrow$

$$\frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D y^2 \rightarrow \dots v = \pm \omega \sqrt{A^2 - y^2} \rightarrow v = \pm \pi \sqrt{0,4^2 - (0,2\sqrt{2})^2} \rightarrow v = \pm 0,2\sqrt{2}\pi \text{ m/s}$$

ζ) Από ΑΔΕΤ:

$$E = K + U \xrightarrow{U=15K} E = 15U + U \rightarrow E = 16U \rightarrow \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = 16 \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \pm \frac{v_{\max}}{4} \rightarrow$$

$$v = \pm \frac{0,4\pi}{4} \rightarrow v = \pm 0,1\pi \text{ m/s}$$

η)

Α τρόπος:

Τα σημεία Α και Β απέχουν μεταξύ τους $\Delta x = x_B - x_A = 12 - 8 = 4\text{m} = \lambda$, απέχουν δηλαδή απόσταση πολλαπλάσια του μήκους κύματος οπότε είναι συμφασικά. Άρα όταν το σημείο Β θα κινείται με ταχύτητα $v_B = 0,2\text{m/s}$, το σημείο Α θα έχει επίσης ταχύτητα $v_A = 0,2\text{m/s}$.

Β τρόπος:

Από τον τύπο:

$$\Delta\phi = \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi(12-8)}{4} \rightarrow \Delta\phi = 2\pi$$

Επειδή η διαφορά φάσης των σημείων είναι $\Delta\phi = 2\kappa\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ τα σημεία είναι συμφασικά.

θ)

Α τρόπος:

Τα σημεία Α και Γ απέχουν μεταξύ τους $\Delta x = x_\Gamma - x_A = 10 - 8 = 2\text{m} = \lambda/2$, απέχουν δηλαδή απόσταση περιττή πολλαπλάσια του $\lambda/2$ οπότε είναι σημεία αντίθετης φάσης. Άρα όταν το σημείο Γ θα κινείται με ταχύτητα $v_B = 0,3\text{m/s}$, το σημείο Α θα έχει αντίθετη ταχύτητα $v_A = -0,3\text{m/s}$.

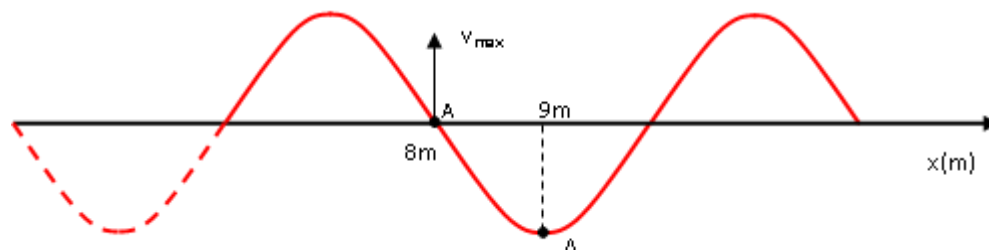
Β τρόπος:

Από τον τύπο:

$$\Delta\phi = \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi(12-10)}{4} \rightarrow \Delta\phi = \pi$$

Επειδή η διαφορά φάσης των σημείων είναι $\Delta\phi = (2\kappa+1)\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ τα σημεία αντίθετης φάσης.

ι) Τα σημεία Α και Δ απέχουν μεταξύ τους $\Delta x = x_{\Delta} - x_A = 9 - 8 = 1\text{m} = \lambda/4$, άρα όταν το σημείο Δ είναι στην ακραία αρνητική θέση το Α θα βρίσκεται στην θέση ισορροπίας και μάλιστα θα έχει μέγιστη θετική ταχύτητα $v_A = 0,4\pi\text{m/s}$.



κ) Υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Α και Ζ:

$$\varphi_A = 2\pi(t/T - x_A/\lambda) \text{ και } \varphi_Z = 2\pi(t/T - x_Z/\lambda)$$

$$\varphi_A - \varphi_Z = 2\pi \frac{x_Z - x_A}{\lambda} \rightarrow \varphi_A - \varphi_Z = 2\pi \frac{\frac{26}{3} - 8}{4} \rightarrow \varphi_A - \varphi_Z = 2\pi \frac{\frac{2}{3}}{4} \rightarrow \varphi_A - \varphi_Z = \pi/3$$

Από την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου z έχουμε:

$$y_z = A \eta\mu\varphi_z \rightarrow A/2 = A \eta\mu\varphi_z \rightarrow \eta\mu\varphi_z = 1/2 \begin{cases} \varphi_z = 2\kappa\pi + \pi/6 \\ \varphi_z = 2\kappa\pi + 5\pi/6 \end{cases}$$

επειδή το σημείο z έχει θετική ταχύτητα η φάση του είναι $\varphi_z = 2\kappa\pi + \pi/6$, άρα την ίδια χρονική στιγμή η φάση του Α είναι:

$$\varphi_A = \varphi_z + \pi/3 \rightarrow \varphi_A = 2\kappa\pi + \pi/6 + \pi/3 \rightarrow \varphi_A = 2\kappa\pi + \pi/2$$

άρα η ταχύτητα του Α είναι:

$$v_A = 0,4\pi \sigma\upsilon\nu\varphi_A \rightarrow v_A = 0,4\pi \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \pi/2) \rightarrow v_A = 0$$