Θέση–μετατόπιση, γωνία, φάση…

Για μια συνεπή διδασκαλία ή

«Γιατί όποιος κατουράει στη θάλασσα, το βρίσκει στο αλάτι…»

(Καλοκαιρινό!)

1. Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση:

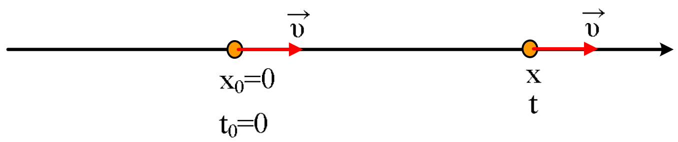
Μελετάμε την κίνηση ενός σώματος σε ευθεία γραμμή. Για τη μελέτη μας αυτή, ορίζουμε ένα χωρικό σύστημα συντεταγμένων (τον άξονα xx΄), οπότε μπορούμε να ξέρουμε τη θέση του σώματος x, ενώ ορίζουμε κάποια χρονική στιγμή αυθαίρετα ως t=0. Διδάσκουμε λοιπόν στους μαθητές μας τη διαφορά μεταξύ της χρονικής στιγμής t και του χρονικού διαστήματος Δt, όπως επίσης τη διαφορά μεταξύ της θέσης x του κινητού και της μετατόπισής του Δx (αλήθεια μήπως θα ήταν πιο πρόσφορο να εγκαταλείπαμε τον όρο μετατόπιση και να περιοριζόμαστε στον όρο μεταβολή της θέσης Δx;). Έτσι μελετώντας την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση γράφουμε:

$$\Delta x=\upsilon\cdot\Delta t \quad (1)$$

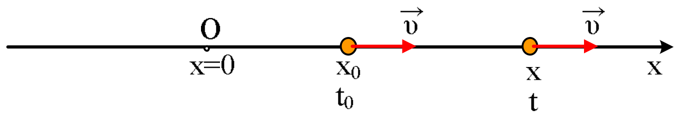
και ξαφνικά πετάμε ένα **ή**:

$$x=\upsilon\cdot t \quad (2)$$

Από πού και ως πού οι σχέσεις (1) και (2) είναι ισοδύναμες για να συνδέονται με το διαζευκτικό **ή**;



σχ.α



σχ.β

Επειδή είναι σωστό για την κίνηση που δείχνεται στο πρώτο σχήμα, είναι και σωστό και για την κατάσταση στο δεύτερο σχήμα; Προφανώς όχι.

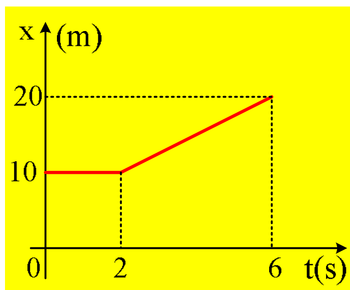
Μήπως θα ήταν καλύτερα να μετατρέπαμε τη σχέση (1) στις ισοδύναμες της:

$$x-x_0=\upsilon\cdot(t-t_0)$$

Οπότε αν θέσουμε $t_0=0$ να πάρουμε τελικά:

$$\mathbf{x=x_0+\upsilon\cdot t \quad (3)}$$

Δυστυχώς στα πλαίσια της απλοποίησης (άντε να μην μπλέξουμε τα παιδιά, να μην τα ζορίσουμε, αρχή είναι ας μην τα κάνουμε να μισήσουν τη Φυσική κ.λ.π. …) ξεχνάμε ό,τι έχουμε διδάξει και κρατάμε τελικά τη σχέση (2) και πορευόμαστε…. Κάνετε μια δοκιμή. Δώστε στους μαθητές σας το διπλανό διάγραμμα και αφού τους ζητήσετε να υπολογίσουν την ταχύτητα του σώματος (όπου υπάρχει), ζητεί-



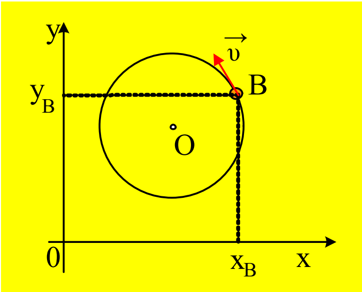
στε τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t=2,4s.

Κάντε τη δοκιμή και θα εκπλαγείτε!

2. Ομαλή Κυκλική Κίνηση.

Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά, όπως στο παρακάτω σχήμα. Πώς προσδιορίζεται η **θέση** του κάποια στιγμή;

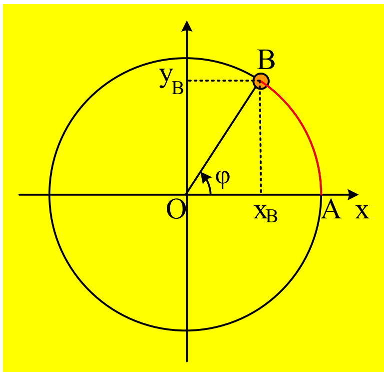
Γενικά η κυκλική κίνηση μπορεί να περιγραφεί μελετώντας την θέση του σώματος ως προς ένα οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς, όπως το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του παρακάτω σχήματος.



Προφανώς η λύση αυτή δεν είναι και τόσο πρακτική!!! Θα ήταν προφανώς καλύτερα, το κέντρο των αξόνων να ταυτίζεται με το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Αλλά τότε μπορούμε να δουλέψουμε με δύο ισοδύναμους τρόπους.

1) Δίνοντας τις συντεταγμένες του σημείου Β πάνω στους κάθετους μεταξύ τους άξονες x και y. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να περιοριστούμε στο μήκος του τόξου ΑΒ, θεωρώντας ως αρχή μέτρησης των τόξων το σημείο Α, που βρίσκεται πάνω στον άξονα x.

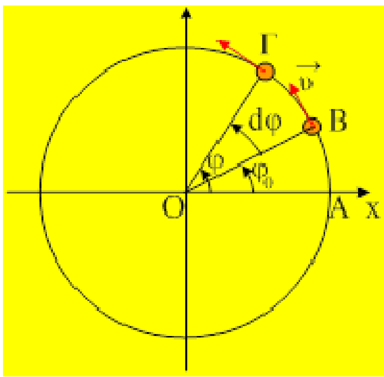
2) Δίνοντας τη γωνία φ, η οποία μετριέται πάντα (αφού έτσι **αποφασίσαμε** να την μετράμε…) αριστερόστροφα, με αρχική πλευρά αυτή που συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα οx. Ας επισημάνουμε ότι η γωνία αυτή, κατά τη μελέτη μιας κίνησης, θα πρέπει να μετριέται σε ακτίνια (rad). Προφανώς ένα δεύτερο μέγεθος απαραίτητο για τον προσδιορισμό της θέσης είναι και η ακτίνα του κύκλου R, όπου στα παρακάτω θα θεωρείται σταθερή και δεδομένη.



Ας περιοριστούμε στον δεύτερο τρόπο μελέτης μας.

Η γωνία φ, όπως ορίστηκε, ορίζει τη θέση του σώματος που βρίσκεται πάνω σε ένα κύκλο ορισμένης ακτίνας. Και αν το σώμα κινείται;

Στο διπλανό σχήμα ένα σώμα τη χρονική στιγμή t_0 περνά από το σημείο Β και κινούμενο με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα τη στιγμή t, περνά από το σημείο Γ. Η γωνία $φ_0$ προσδιορίζει την αρχική **γωνιακή του θέση**, ενώ η γωνιά φ την τελική γωνιακή του θέση. Η μεταβολή της γωνιακής του θέσης, ας την ονομάσουμε **γωνιακή μετατόπισή** του ή απλά ας την πούμε «η γωνία που διαγράφει» το σώμα, είναι η γωνία $dφ=φ-φ_0$.



Ορίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος, το διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς, στο κέντρο Ο του κύκλου, με φορά προς τα έξω και με μέτρο:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

Συνεπώς $d\varphi=\omega\cdot dt$ και αν ω = σταθερό τότε:

$$\varphi-\varphi_0=\omega\cdot\Delta t \text{ ή}$$

$$\varphi= \varphi_0+\omega\cdot(t-t_0)$$

Αν δε, $t_0=0$ τότε:

$$\boldsymbol{\varphi= \varphi_0+ \omega\cdot t \quad (4)}$$

Η σχέση (4) μας δίνει κάθε στιγμή τη γωνιακή θέση του σώματος φ, σε συνάρτηση 1) με το χρόνο κίνησης t και 2) το φ_0, την αρχική γωνιακή του θέση. Ας σημειωθεί ότι **το γινόμενο ω·t μετράει τη γωνιακή του μετατόπιση,** δηλαδή τη γωνία που έχει διαγράψει το σώμα στη διάρκεια της κίνησής του.

Ένα ερώτημα, που μπαίνει εδώ, είναι τι τιμές παίρνει η αρχική γωνιακή θέση φ_0 του σώματος; Αν π.χ. $\varphi_0=\pi/3$, μήπως κάποιος δικαιούται να υποστηρίξει ότι η αρχική θέση είναι η $\varphi_0=2\kappa\pi+\pi/3$, όπου κ ακέραιος; Προφανώς κάθε γωνία $2\pi+\pi/3$ ή $4\pi+\pi/3$ κ.ο.κ. καταλήγει στο ίδιο σημείο Β, αλλά για την οικονομία της μελέτης μας και την απλούστευση των πραγμάτων, **δεχόμαστε** τη μικρότερη δυνατή τιμή, η οποία περιορίζει την αρχική γωνιακή θέση στο διάστημα [0,2π) ή αλλιώς $0\le\varphi_0<2\pi$, **αφού δεν προσθέτει κάτι ουσιαστικό, κάποια ουσιαστική πληροφορία στην μελέτη μας, να υποστηρίξει κάποιος ότι $\varphi_0=2\pi+\pi/3$.**

Όλα αυτά θα πρέπει να τα διδάξουμε; Νομίζω ναι, είναι σε απόλυτη συμφωνία με τη μελέτη της ευθύγραμμης κίνησης, απλά πρέπει να επιμείνουμε στο τι είναι, το κάθε μέγεθος που υπεισέρχεται στη σχέση (3). Δεν πρέπει οι μαθητές μας να μπερδεύουν τη γωνία (φ) με τη γωνία που διαγράφει το σώμα σε ορισμένο χρόνο το κινητό ($\Delta\varphi=\omega\cdot\Delta t$), όπως δεν πρέπει να μπερδεύουν τη θέση με τη μετατόπιση στην ευθύγραμμη κίνηση. Ας το ξαναπούμε:

Ευθύγραμμη κίνηση	Κυκλική κίνηση
Θέση x	Γωνία φ
$x=x_0+\upsilon\cdot t \quad (t_0=0)$	$\varphi=\varphi_0+\omega\cdot t \quad (t_0=0)$
μεταβολή θέσης (μετατόπιση) Δx	μεταβολή γωνίας Δφ

Κάθε «απλοποίηση» των παραπάνω, θα οδηγήσει αργά ή γρήγορα σε παρανοήσεις και λάθη.

3. Γραμμική (απλή) αρμονική ταλάντωση.

Ας δούμε λοιπόν τι προκύπτει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει μια ΓΑΤ. Ποιας διαφορικής; Μα του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα:

$$\Sigma F=m\cdot a \text{ ή } \quad -Dx=m\frac{d^2x}{dt^2} \text{ ή}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+Dx=0 \quad (5)$$

Εδώ θα ήθελα να τονίσω ότι **η λύση,** δεν είναι μια οποιαδήποτε λύση της παραπάνω εξίσωσης, αλλά εκείνη που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες, οι οποίες δεν υπάρχουν στην παραπάνω εξίσωση.

Για να γίνει κατανοητή η σημασία της παραπάνω πρότασης, ας δανειστούμε ένα παράδειγμα από άλλη περιοχή της φυσικής. Ένα σώμα κινείται με την επίδραση μιας σταθερής δύναμης, έστω του βάρους του. Τι κίνηση κάνει; Μα αυτό δεν μας το καθορίζει **μόνο** ο δεύτερος νόμος, γιατί ανάλογα με την αρχική ταχύτητα, μπορεί να κάνει ελεύθερη πτώση, οριζόντια, κατακόρυφη ή και πλάγια βολή.

Έτσι μπορεί να ισχύει η παραπάνω εξίσωση (5), αλλά να μην υπάρχει καμιά ταλάντωση. Φανταστείτε την κατάσταση όπου για t=0, το σώμα βρίσκεται στη θέση x=0 έχοντας ταχύτητα υ=0. Μια τέλεια ισορροπία!!!

Ας επανέλθουμε τώρα στην εξίσωση (5). Η λύση της μπορεί να γραφεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπως αναλυτικά τις παρουσιάζει ο Θρασύβουλος Μαχαίρας στο βιβλίο του. Αλλά αυτό σημαίνει ότι πρέπει να διδάξουμε και τις τρεις μορφές (και την ημιτονοειδή και την συνημιτονοειδή και με τη μορφή του αθροίσματος Αημωt+Βσυνωt); Κατά την προσωπική μου άποψη όχι. Η λύση που περιέχουν τα σχολικά μας βιβλία:

$$\mathbf{x = A\cdot ημ(ωt+φ_0)} \quad (6)$$

νομίζω ότι αρκεί για τη διδασκαλία μας σε Λυκειακό επίπεδο, αυτήν πρέπει να διδάξουμε και σε αυτήν πρέπει να επιμείνουμε. Νομίζω ότι λόγοι οικονομίας το επιβάλλουν.

Είναι σημαντική η παραπάνω εξίσωση; Κατά τη γνώμη μου, ναι, πολύ σημαντική. Κάθε κίνηση περιγράφεται από μια αντίστοιχη εξίσωση x=f(t) (ή αν δεν είναι ευθύγραμμη και y=f(t) ή και z=f(t)). Ή για να το πω διαφορετικά, κάθε κίνηση ενός σώματος μελετάται παρακολουθώντας τη θέση του και πώς αυτή μεταβάλλεται με το πέρασμα του χρόνου. Είναι **η εξίσωση κίνησης** του σώματος. Από την παραπάνω εξίσωση με παραγώγιση μπορούμε να πάρουμε τις άλλες γνωστές εξισώσεις:

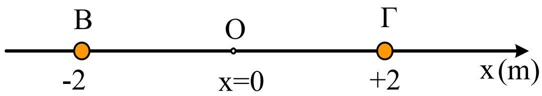
$$υ=ω\cdot A\cdot συν(ωt+φ_0) \text{ και}$$

$$α= -\, ω^2\cdot A\cdot ημ(ωt+φ_0)$$

Σπουδαίες; Χρήσιμες; Προφανώς ναι, αλλά να μην τα «ισοπεδώνουμε» και όλα!!! Η εξίσωση (6) είναι η βασική εξίσωση κίνησης σε μια Γ.Α.Τ. Τα μεγέθη που μπαίνουν στην εξίσωση (6) πρέπει να προσεχθούν και να **ορισθούν** με απόλυτη σαφήνεια, τα υπόλοιπα **προκύπτουν** εύκολα. Και ό,τι συνθήκες και περιορισμοί τεθούν για την εξίσωση (6), δεν μεταφέρονται τυπικά στις παραπάνω εξισώσεις[1].

Για να δούμε λοιπόν ποια μεγέθη περιέχει η παραπάνω σχέση:

1) Η απομάκρυνση x, από τη θέση ισορροπίας. Μήπως θα ήταν προσφορότερο να λέγαμε η θέση του σώματος; Αν ένα σώμα εκτελεί ΓΑΤ μεταξύ των σημείων Β και Γ του παρακάτω σχήματος, γύρω από τη θέση ισορροπίας Ο, μήπως είναι πιο απλό να πούμε ότι κινείται πάνω στον άξονα xx΄ γύρω από τη θέση x=0 και απλά αυτό το x, δείχνει τη θέση, η οποία μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα [-2m,2m].



Μήπως με αυτό τον τρόπο τα πράγματα είναι συμβατά με όσα έχουν μάθει για κάθε ευθύγραμμη κίνηση, όπως αναφέρθηκε στην αρχή αυτού του άρθρου και δεν χρειάζεται να εξηγούμε γιατί η απομάκρυνση δεν είναι απόσταση αλλά παίρνει και αρνητικές τιμές κ.ο.κ. Η μόνη διαφορά που πρέπει να επισημανθεί είναι η εξής:

Σε μια ευθύγραμμη κίνηση η αρχή του άξονα (x=0) ορίζεται αυθαίρετα, εδώ θεωρούμε αρχή του άξονα τη θέση ισορροπίας, στη θέση δηλαδή που μηδενίζεται η δύναμη επαναφοράς.

(θα μπορούσε η θέση ισορροπίας να ήταν π.χ. στην θέση x_1=+3m, αλλά τότε η εξίσωση της κίνησης θα είχε τη μορφή $x=3 + A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$, πράγμα που δεν μας απασχολεί στην παρούσα φάση).

2) Η γωνιακή (ή κυκλική) συχνότητα ω η οποία δίνεται από την εξίσωση $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$, είναι μονόμετρο μέγεθος (σε αντίθεση με τη γωνιακή ταχύτητα), έχει διαστάσεις $[T]^{-1}$, δηλαδή μονάδα την ίδια με τη συχνότητα (1/s) και η τιμή της καθορίζεται αυστηρά από χαρακτηριστικά του ταλαντωτή. **Τη μάζα του και τη σταθερά επαναφοράς.** Ένας συγκεκριμένος ταλαντωτής θα έχει πάντα την ίδια γωνιακή συχνότητα, ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες ή την ενέργεια ταλάντωσης. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ω=2π/Τ, όπου Τ η περίοδος ταλάντωσης. Συνεπώς **η διαφορική της ΓΑΤ, ουσιαστικά μας δίνει την περίοδο** της ταλάντωσης.

3) Το πλάτος ταλάντωσης (Α). Ουσιαστικά εξαρτάται από την ενέργεια ταλάντωσης (ή μήπως την καθορίζει;), άρα στην πραγματικότητα η τιμή του καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες και δεν προκύπτει από την διαφορική εξίσωση (5).

4) Τέλος μένει το φ_0, του οποίου η τιμή εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή από την θέση και την ταχύτητα του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή την οποία λαμβάνουμε ως t=0 και δεν εξαρτάται, ούτε προκύπτει από τη διαφορική εξίσωση (5).

Θεωρείται σκόπιμο να δώσουμε όνομα στο όρισμα του ημιτόνου, στην ποσότητα $(\omega t+\varphi_0)$; Την ποσότητα αυτή συνηθίζουμε να αποκαλούμε **φάση**, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\varphi = \omega t+\varphi_0 \quad (7)$$

όπου θέτοντας t=0 βρίσκουμε $\varphi=\varphi_0$, οπότε αυτομάτως το φ_0 είναι η **αρχική φάση** της απομάκρυνσης. Και αφού είναι η φάση, στην εξίσωση της κίνησης (της ταλάντωσης), μπορούμε και να την **ορίσουμε** και ως **φάση της ταλάντωσης**. Αν το κάνουμε δημιουργούμε κάποια σύγχυση, έχει πρόβλημα ο ορισμός αυτός; Είναι πρόσφορη; Για μένα, ναι είναι.

Πρώτα – πρώτα βρίσκεται σε απόλυτη συνέπεια με όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω για άλλες κινήσεις. Ας το δούμε ξανά τώρα, όπου στην τρίτη στήλη, έχουμε τις τιμές για τη φάση και τις μεταβολές της (και όχι τη θέση του σώματος) :

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση	Ομαλή Κυκλική κίνηση	Αρμονική ταλάντωση
Αρχική θέση x_0	Αρχική γωνία φ_0	Αρχική φάση φ_0
Θέση x	Γωνία φ	Φάση φ
$x=x_0+\upsilon\cdot t \quad (t_0=0)$	$\varphi=\varphi_0+\omega\cdot t \quad (t_0=0)$	$\varphi=\varphi_0+\omega\cdot t \quad (t_0=0)$
μεταβολή θέσης (μετατόπιση) Δx $\Delta x=\upsilon\cdot t \quad (t_0=0)$	μεταβολή γωνίας Δφ $\Delta\varphi=\omega\cdot t \quad (t_0=0)$	Μεταβολή φάσης Δφ $\Delta\varphi=\omega\cdot t \quad (t_0=0)$

Ας προσέξουμε το γινόμενο ωt δεν δίνει τη φάση, αλλά τη μεταβολή της φάσης $\Delta\varphi=\omega\cdot\Delta t$ ή (αν $t_0=0$, τότε) $\Delta\varphi=\omega\cdot t$.

Συμπέρασμα 1^{ο}:

Η μεταβολή της φάσης ενός ταλαντωτή συνδέεται με το χρόνο ταλάντωσής του και όχι η φάση του. Όπως ακριβώς η μετατόπιση στην ευθύγραμμη κίνηση, συνδέεται με το χρόνο κίνησης και όχι η θέση. Η φάση από μόνη της έχει τόσες πληροφορίες, όσες έχει και η θέση ενός κινητού. Τι πληροφορίες αντλούμε για την κίνηση ενός σώματος, από την πληροφορία ότι κάποια στιγμή περνάει από τη θέση x=20m;

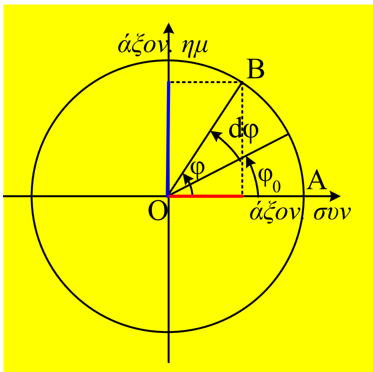
Ας δούμε τώρα κάποια άλλα θέματα, σαν συνέπεια των παραπάνω.

Παρατήρηση 1^{η}:

Η εξίσωση της απομάκρυνσης στην αρμονική ταλάντωση είναι ημιτονοειδής συνάρτηση. Αλλά πώς ένας μαθητής έχει συνηθίσει να δουλεύει με τριγωνομετρικούς αριθμούς; Μα να χρησιμοποιεί τον Τριγωνομετρικό κύκλο. Το ημίτονο και το συνημίτονο είναι περιοδικές συναρτήσεις και ο καλύτερος τρόπος, για να αναδειχθεί αυτή η περιοδικότητα, είναι ο τριγωνομετρικός κύκλος.

Δεν ξέρω τι μπορεί να καταλάβει ένας μαθητής όταν του πεις, βρες το ημίτονο του 100. Τι είναι αυτό το 100; Έχει ημίτονο ο αριθμός 100; Όταν του πεις όμως βρες το ημίτονο του 30,25π (rad) το «καταλαβαίνει», το μεταφέρει στον τριγωνομετρικό κύκλο, και μπορεί να το βρει.

Κατά συνέπεια μήπως μπορεί να δουλέψει και να κατανοήσει τη φάση και την αρχική φάση, αν δει το παρακάτω σχήμα;



Μήπως, αφού η φάση είναι το όρισμα του ημιτόνου, μπορώ να την δω σαν μια γωνία, πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, που απλά η μια της πλευρά μετακινείται, στρέφεται;

Με βάση δε, όσα προηγούμενα είχαν υποστηριχθεί, κατανοούμε ότι και η αρχική φάση πρέπει να ικανοποιεί τον περιορισμό, που είχαμε θέσει και στην κυκλική κίνηση, δηλαδή:

$$0 \le \varphi_0 < 2\pi$$

Αλλά, αφού η μεταβολή της φάσης $\Delta\varphi=\omega\cdot t$ είναι ανάλογη του χρόνου, αυτό το ω (ο συντελεστής αναλογίας, που είναι απλά ένα μονόμετρο φυσικό μέγεθος, **η γωνιακή συχνότητα**) δεν θα είναι ίσος με το ρυθμό που θα αυξάνεται η γωνία ή με άλλα λόγια δεν θα είναι ίσος με το μέτρο **της γωνιακής ταχύτητας** περιστροφής της πλευράς ΟΒ;

Αν τώρα η ακτίνα του παραπάνω κύκλου, δεν είναι ίση με τη μονάδα, αλλά είναι ίση με το πλάτος της ταλάντωσης, με τι θα είναι ίσο το μήκος του μπλε ευθύγραμμου τμήματος, του παραπάνω σχήματος; Μα προφανώς θα είναι $A\cdot ημ(ωt+φ_0)$, δηλαδή ίσο με την απομάκρυνση του ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας του.

Τι λέτε δεν είναι βολική η κινηματική μελέτη της ΓΑΤ, μέσα από αυτήν την πορεία; Θέλετε να την ονομάσετε μελέτη με τη βοήθεια των περιστρεφομένων διανυσμάτων, θέλετε κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης; Πείτε την όπως θέλετε.

Η ουσία δεν αλλάζει.

Παρατήρηση 2η:

Η μελέτη και των τριών παραπάνω κινήσεων και οι τελικές εξισώσεις κίνησης, προέκυψαν θεωρώντας ότι το σώμα ξεκινά την κίνησή του τη χρονική στιγμή t=0. Αν αυτό δεν συμβαίνει, προφανώς αντί για t θα πρέπει να γράψουμε Δt, σε όλες τις περιπτώσεις.

Για παράδειγμα

i) Αν ένα σώμα ξεκινά τη χρονική στιγμή t_0=3s από τη θέση x_0=-40m και κινείται με σταθερή ταχύτητα υ=4m/s, ποια η εξίσωση της κίνησής του και ποια η θέση του τη χρονική στιγμή t_1=2s;

Η εξίσωση της κίνησης του σώματος θα προκύψει από την σχέση (3) αν αντικαταστήσουμε το t με το Δt. Έτσι παίρνουμε:

$$x=x_0+υ\cdot(t-t_0) \text{ ή}$$

$$x= -40 + 4\cdot(t-3) \quad \text{(μονάδες στο S.I.)}$$

ή τελικά

$$x= -52+4t \quad (α)$$

Και εδώ μπορούμε να κάνουμε εύκολα το λάθος! Ξεχνάμε να δώσουμε το πεδίο ορισμού της σχέσης (α), (μας φαίνεται πολύ μαθηματικοποιημένη η ορολογία!) οπότε άνετα!!! και τυπικά (μη) σκεπτόμενος κάποιος, βαφτίζει αυτό το -52m αρχική θέση και αντικαθιστώντας π.χ. για t=2s βρίσκει x= - 44m, ενώ το σώμα δεν έχει μετακινηθεί ακόμη από την αρχική του θέση.

Και επειδή το παραπάνω παράδειγμα μιλάει για τα αυτονόητα, ας δούμε ένα άλλο.

ii) Ένα υλικό σημείο είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου και τη χρονική στιγμή t_1=3s αφήνεται να κινηθεί από τη μέγιστη θετική απομάκρυνσή του, οπότε εκτελεί Γ.Α.Τ. με περίοδο 1s. Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x=A\cdot ημ(ω\cdot Δt+π/2)$, αφού δεν ξεκίνησε την ταλάντωσή του για t=0, ενώ ξεκινά από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση. Έτσι παίρνουμε:

$$x=A\cdot ημ[ω\cdot(t-3)+π/2] \text{ ή}$$

$$x=A\cdot ημ(2πt-5{,}5π) \quad (β)$$

Και εδώ ξεχνάμε να ορίσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (β) και είναι πολύ εύκολο να θέσει κάποιος π.χ. t=1s και να βρει x=-A, ενώ το σώμα δεν έχει αρχίσει ακόμη την ταλάντωσή του και βρίσκεται ακίνητο στη θέση x=+A.

Κρύβεται κάποια ιδιαίτερη πληροφορία σε αυτό το (-5,5π) της παραπάνω εξίσωσης; Τη χρονική στιγμή t_1 που ξεκινά το σώμα την ταλάντωσή του έχει (μήπως αρχική[2];) φάση π/2, αφού ξεκινά από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση. Άρα

$$\varphi=\pi/2 \text{ ή } 2\pi t_1 -5{,}5\pi=\pi/2 \text{ ή } t_1=3s$$

μπορούμε να βρούμε δηλαδή, μόνο από την εξίσωση της κίνησης και χωρίς άλλες πληροφορίες, τη χρονική στιγμή που ξεκινά η ταλάντωση.

Ας μην βιαστούμε λοιπόν, βλέποντας αυτό το (-5,5π), να τροποποιήσουμε την παραπάνω σχέση, αφού λόγω τριγωνομετρίας, η σχέση αυτή θα μπορούσε να γραφεί (για να είναι συμβατή με τον ορισμό, αλλά και τον περιορισμό που θέσαμε για την αρχική φάση) με τη μορφή:

$$x=A\cdot\eta\mu(2\pi t-5{,}5\pi+6\pi)=A\cdot\eta\mu(2\pi t+\pi/2)$$

Αν το κάνουμε θα είναι απλά λάθος!!!

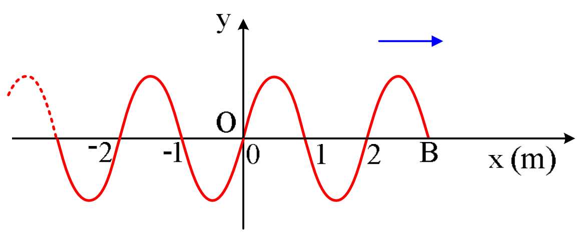
Μα, θα αντιτείνει κάποιος, γιατί να πάρουμε ότι η ταλάντωση ξεκινά χρονική στιγμή διάφορη του μηδενός;

Γιατί αυτό συμβαίνει στα κύματα…

Και εκεί μπαίνουν μεγέθη, όπως η φάση ή η αρχική φάση. Ναι αλλά για ποιο σημείο; Το κάθε σημείο έχει τη δική του φάση! Όταν λοιπόν αναφερόμαστε γενικώς για αρχική φάση ενός κύματος, για ποιο σημείο μιλάμε; Μα, η εξίσωση ενός κύματος προκύπτει αφού αυθαίρετα ορίσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, οπότε έτσι ορίζουμε ένα «προνομιούχο» σημείο, αυτό στη θέση x=0, ενώ ταυτόχρονα ορίζουμε και κάποια αρχή μέτρησης των χρόνων (επίσης αυθαίρετα). Έτσι η εξίσωση που γράφουμε, αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς και θα ήταν συνεπές, να ορίζαμε κάθε φορά το πεδίο ορισμού της. Μόνο έτσι δεν θα είχαμε τα εύκολα λάθη που μπορούν να εμφανιστούν.

Ας δούμε δυο παραδείγματα:

i) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά, με περίοδο 1s, το οποίο ελήφθη τη χρονική στιγμή t=0.



Ποια η εξίσωση του κύματος;

Το σημείο Β ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τα πάνω (θετική φορά) συνεπώς η εξίσωση ταλάντωσης του θα είναι της μορφής:

$$y_B = A \cdot ημωt = A \cdot ημ2πt$$

ενώ κάθε σημείο δεξιά του Β, στη θέση x, θα έχει στο μέλλον εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y = A \cdot ημ2π(t - \frac{x-3}{υ}) \text{ ή}$$

$$y = A \cdot ημ2π(t - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}) \ (S.I.)$$

Και αν θέλουμε να μιλήσουμε για την αρχική φάση του κύματος; Τι νόημα έχει ο όρος αρχική φάση[2]; Εδώ θα μπορούσαν να μπουν δυο απαντήσεις (ενδεχόμενα):

1) Μιλάμε για τη φάση για t=0 του σημείου Ο στη θέση x=0 και αυτή στο παράδειγμά μας είναι ίση με 3π, εδώ δηλαδή, δεν μπορούμε να πούμε ότι θα πρέπει να ισχύει $0 \leq φ_0 < 2π$. Εδώ έχει **φυσική** αξία αυτή η τιμή της αρχικής φάσης. Αρχική φάση 3π, στο παράδειγμά μας, σημαίνει ότι τη στιγμή αυτή το υλικό σημείο στη θέση x=0, έχει ήδη πραγματοποιήσει 1,5 ταλάντωση. Δεν νομίζω ότι κάποιος μπορεί να αμφισβητήσει την αξία που έχει λοιπόν η φάση 3π.

2) Μιλάμε για τη φάση που έχει το σημείο Ο στη θέση x=0, τη χρονική στιγμή που ξεκινά την ταλάντωσή του; Τότε αυτή είναι προφανώς ίση με μηδέν, αφού ξεκινά από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση[2].

Και μια παραλλαγή:

ii) Το παραπάνω στιγμιότυπο ελήφθη τη χρονική στιγμή t_0=4s. Ποια η εξίσωση του κύματος και ποια η αρχική φάση του σημείου Ο;

Με την ίδια, όπως και προηγουμένως, λογική έχουμε για το σημείο Β, στη θέση x=3m:

$$y_B = A \cdot ημω(t-4) = A \cdot ημ(2πt-8π)$$

ενώ κάθε σημείο δεξιά του Β, στη θέση x, θα έχει στο μέλλον εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y = A \cdot ημ2π(t - 4 - \frac{x-3}{υ}) \text{ ή}$$

$$y = A \cdot ημ2π(t - \frac{x}{2} - \frac{5}{2}) \ (S.I.)$$

Η φάση κάθε σημείου είναι ίση με:

$$\phi = 2π(t - \frac{x}{2} - \frac{5}{2}) \underset{x=0}{\overset{t=0}{\Longrightarrow}} \phi_0 = -5π$$

Η παραπάνω τιμή έχει κάποια φυσική αξία; Όση έχει ότι και ένα σώμα που κινείται ευθύγραμμα για t=0s βρίσκεται στη θέση x= -20m. Αλλά προφανώς βρήκαμε άλλη τιμή, από ότι προηγούμενα και μάλιστα μας προέκυψε και αρνητική!!! Προφανώς, η απάντηση είναι σωστή και δεν πρέπει να συγχέεται με περιορισμούς που βάλαμε στον **αρχικό ορισμό της αρχικής φάσης** της ταλάντωσης…

Και το (-), τι φυσική αξία έχει; Μα, να μην ξεχνάμε, ότι η μεταβολή της φάσης συνδέεται με το χρόνο ταλάντωσης και όχι η φάση. Τη χρονική στιγμή που το σημείο Ο θα αρχίσει να ταλαντώνεται, θα έχει φάση μηδενική, το -5π απλά σημαίνει ότι θα περάσει χρονικό διάστημα ίσο με 2,5 περιόδους (μετά τη χρονική στιγμή t=0), μέχρι να έρθει η στιγμή να αρχίσει να ταλαντώνεται ή με άλλα λόγια ότι η ταλάντωση του σημείου Ο είχε αρχίσει τη χρονική στιγμή $t_1=2,5T=2,5s$.

Συμπέρασμα 2^o:

Επειδή ορίσαμε την αρχική φάση στην αρμονική ταλάντωση (αλλά και την αρχική γωνιακή θέση φ_0 στην κυκλική κίνηση), να ικανοποιεί τη σχέση $0\le\varphi_0<2\pi$ για λόγους οικονομίας στη μελέτη μας (αλλά επειδή **δεν υπήρχε και λόγος να μην το κάνουμε**), δεν σημαίνει ότι σε κάθε περίπτωση που έχουμε μια ημιτονοειδή (ή συνημιτονοειδή) σχέση, θα πρέπει να ικανοποιείται ο παραπάνω περιορισμός. Σε πολλές περιπτώσεις επιβάλλεται να παραμένει εμφανής η τιμή φ_0 η οποία μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 2π ή και να έχει αρνητική τιμή.

Σημείωση [1]:

Αυτό που υποστηρίζω είναι ότι ο ορισμός της φάσης $\varphi=\varphi_0+\omega t$, έγινε στην εξίσωση της απομάκρυνσης, η οποία είναι η ουσιαστική εξίσωση για τη μελέτη κάθε αρμονικής κίνησης. Οι εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, παράγονται από την εξίσωση της απομάκρυνσης με μια παραγώγιση (ή και δυο) και οι περιορισμοί που θέσαμε εκεί, δεν θα πρέπει ελαφρά τη καρδία, να μεταφέρονται και εδώ. Έτσι αν η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$y= A\cdot \eta\mu\left(\omega t+\frac{5\pi}{3}\right)$$

Τότε οι αντίστοιχες εξισώσεις για ταχύτητα και επιτάχυνση θα είναι:

$$\upsilon=A\cdot\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\omega t+\frac{5\pi}{3}\right)=A\omega\eta\mu\left(\omega t+\frac{13\pi}{6}\right)$$

$$\alpha=-A\omega^2\eta\mu\left(\omega t+\frac{5\pi}{3}\right)=A\omega^2\eta\mu\left(\omega t+\frac{8\pi}{3}\right)$$

Εδώ θα μπορούσε κάποιος να πει, ότι οι παραπάνω εξισώσεις θα πρέπει να γραφούν με τέτοιο τρόπο, ώστε η φάση κάθε μεγέθους τη στιγμή t=0 να ικανοποιεί τον περιορισμό $0\le\varphi_0<2\pi$. Με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα 2^o, αυτό δεν είναι σωστό. Δεν μας ενδιαφέρει η αρχική φάση της ταχύτητας, τι τιμή παίρνει και δεν έχουμε τους ίδιους περιορισμούς εδώ. Εδώ **έχουμε σοβαρούς λόγους να μην περιοριστούμε** στο διάστημα [0,2π). Αυτό που έχει φυσική σημασία είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των μεγεθών, όπως μεταξύ της ταχύτητας και της απομάκρυνσης:

$$\Delta\varphi=\varphi_\upsilon-\varphi_x=\left(\omega t+\frac{13\pi}{6}\right)-\left(\omega t+\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Γιατί αυτή η διαφορά φάσης έχει φυσική αξία; Γιατί ουσιαστικά μας λέει ότι, αν κάποια στιγμή η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη, θα απαιτηθεί να περάσει χρόνος Τ/4, ώστε η απομάκρυνση να γίνει μέγιστη.
Το ίδιο εξάλλου θα βρούμε αν πάρουμε τη διαφορά φάσης:

$$\Delta\varphi=\varphi_\alpha-\varphi_x=\left(\omega t+\frac{8\pi}{3}\right)-\left(\omega t+\frac{5\pi}{3}\right)=\pi$$

Ποια η αντίστοιχη φυσική σημασία του π; Αν κάποια στιγμή η επιτάχυνση γίνει, ας πούμε, μέγιστη με θετική φορά, θα απαιτηθεί να περάσει χρονικό διάστημα Τ/2 για να συμβεί το ίδιο με την απομάκρυνση.

Να το διατυπώσω διαφορετικά.

Αν η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής:

$$y = A\cdot ημ(ωt+φ_0)$$

δεχτήκαμε περιορισμό ότι για την αρχική φάση πρέπει να ισχύει:

$$0 \le φ_0 < 2π \quad (γ)$$

Αν πάρουμε τώρα την εξίσωση της ταχύτητας $υ=Aω\cdot ημ(ωt+φ_0+π/2)$ είναι λάθος να θέσουμε τώρα και **νέο περιορισμό** ότι πρέπει η αρχική φάση της ταχύτητας να ικανοποιεί τη σχέση:

$$0 \le φ_0+π/2 < 2π \quad (δ)$$

Γιατί; Μα, αν πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι σχέσεις (γ) και (δ), τότε η αρχική φάση $φ_0$ δεν μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες από 3π/2. Αν τώρα πάρουμε και την αντίστοιχη εξίσωση της επιτάχυνσης $α=Aω^2\cdot ημ(ωt+φ_0+π)$, τότε θα πρέπει επίσης να ισχύει και $0 \le φ_0+π < 2π$, αλλά τότε το $φ_0$ δεν μπορεί να είναι πάνω από π. Τελικά πέφτουμε σε σοβαρές αντιφάσεις με τον αρχικό ορισμό της αρχικής φάσης. Εκεί δεν υπήρχε λόγος να βγούμε έξω από το διάστημα [0,2π) και για την οικονομία της παρουσίασης, δεχτήκαμε τον περιορισμό αυτό. Στις υπόλοιπες εξισώσεις **υπάρχει σοβαρός λόγος** και Φυσικής και Μαθηματικών, να δεχτούμε αρχική φάση μεγαλύτερη από 2π.

Σημείωση [2]:

Τι ονομάζουμε αρχική φάση ενός υλικού σημείου Ο;

i) Είναι η φάση του σημείου Ο, τη χρονική στιγμή που ξεκινά την ταλάντωσή του;
ii) Είναι η φάση του, τη χρονική στιγμή t=0; Και τι εννοούμε λέγοντας τη στιγμή t=0; Είναι η στιγμή που άρχισε να λειτουργεί το χρονόμετρό μας ή η στιγμή που εμείς αρχίσαμε να παρακολουθούμε το κύμα; (στο παρόν άρθρο θεώρησα ότι το χρονόμετρο αρχίζει να λειτουργεί τη στιγμή που αρχίζουμε να μελετάμε το φαινόμενο, γενικά όμως μπορεί αυτό να μην συμβαίνει.)

Ένα ερώτημα που αναδεικνύει την αξία του **ορισμού**. Η προσωπική μου άποψη είναι υπέρ της πρώτης εκδοχής, δηλαδή η φάση του σημείου Ο, τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται και κατά συνέπεια είναι και η αρχική φάση κάθε σημείου που φτάνει το κύμα, τη στιγμή που αρχίζει την ταλάντωσή του, αλλά η ανάγκη ενός ξεκαθαρίσματος, νομίζω ότι είναι απαραίτητη.

dmargaris@sch.gr