

Μια περίεργη κίνηση δοκαριού

Ένα ομογενές δοκάρι μήκους L , κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_0$ κατά τον διαμήκη άξονά του, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή αρχίζει να κινείται σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο, το οποίο αποτελεί συνέχεια του λείου επιπέδου. Εάν n είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δοκαριού και του μη λείου επιπέδου να βρείτε:

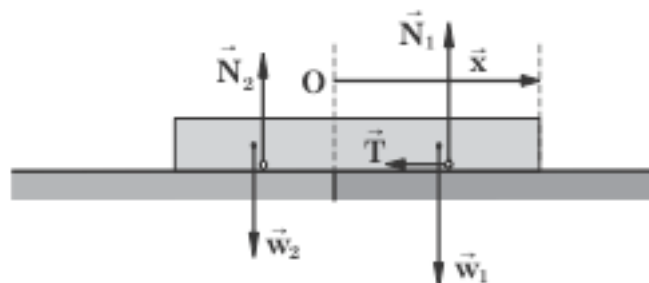
i) τη σχέση μεταξύ των μεγεθών L , v_0 και n , ώστε τη στιγμή που το δοκάρι εγκαταλείπει το λείο επίπεδο να μηδενίζεται η ταχύτητά του και

ii) τον χρόνο κίνησης του δοκαριού από τη στιγμή που άρχισε να κινείται στο τραχύ οριζόντιο επίπεδο. Δίνεται η επιτάχυνση $\vec{g}$ της βαρύτητας.

ΛΥΣΗ i) Εξετάζουμε το δοκάρι σε μία τυχαία θέση όπου η μετατόπισή του στο τραχύ οριζόντιο επίπεδο είναι $\vec{x}$. Στη θέση αυτή το δοκάρι δέχεται το βάρος του, που αναλύεται στα βάρη $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ των τμημάτων που βρίσκονται στο λείο και το τραχύ οριζόντιο επίπεδο αντίστοιχως, την αντίδραση $\vec{N}_2$ του λείου οριζόντιου επιπέδου, η οποία είναι κατακόρυφη και την πλάγια αντίδραση από τραχύ οριζόντιο επίπεδο, η οποία αναλύεται στην τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ και την κάθετη αντίδραση $\vec{N}_1$. Εφαρμόζοντας για το δοκάρι τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα παίρνουμε τη σχέση:

$$\Sigma(\vec{F}) = -\vec{T} \quad (1)$$

όπου $\Sigma(\vec{F})$ η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το δοκάρι κατά τη διεύθυνση της κίνησής του. Όμως το μέτρο της τριβής $\vec{T}$ είναι:



$$T = nN_1 = nw_1 \Rightarrow T = nm_1g \quad (2)$$

όπου m_1 η μάζα του τμήματος του δοκαριού που βρίσκεται στο τραχύ οριζόντιο επίπεδο. Επειδή το δοκάρι είναι ομογενές και σταθερής διατομής ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{m}_1/\mathbf{x} = \mathbf{m}/\mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}\mathbf{x}/\mathbf{L}$$

οπότε η (2) γράφεται:

$$\mathbf{T} = \mathbf{nmgx}/\mathbf{L} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) παίρνουμε:

$$\Sigma(\mathbf{F}) = -\mathbf{nmgx}/\mathbf{L} = -\mathbf{Dx} \quad (4)$$

Η (4) εγγυάται ότι, από τη στιγμή που το δοκάρι συναντήσει το τραχύ τμήμα του οριζοντίου επιπέδου η κίνησή του αποτελεί τμήμα μιας αρμονικής ταλάντωσης, της οποίας η σταθερά είναι $\mathbf{D}=\mathbf{nmg}/\mathbf{L}$. Αυτό σημαίνει ότι η μετατόπισή του $\mathbf{x}$ στο τραχύ τμήμα του οριζοντίου επιπέδου θα έχει τη μορφή:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi}) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\omega}^2 = \mathbf{D}/\mathbf{m} = \mathbf{ng}/\mathbf{L} \quad (5)$$

ενώ η στιγμιαία ταχύτητά του θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_0\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi}) \quad (6)$$

Επειδή τη στιγμή $\mathbf{t}=0$ είναι $\mathbf{x}=0$ και $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0$, οι σχέσεις (5) και (6) δίνουν:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \mathbf{x}_0\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{x}_0\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\varphi} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\varphi} = 0 \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_0/\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\varphi} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\varphi} = 0 \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_0/\boldsymbol{\omega} \end{array} \right\}$$

Τη στιγμή $\mathbf{t}_*$ που το δοκάρι εγκαταλείπει το λείο οριζόντιο επίπεδο ισχύει $\mathbf{x}=\mathbf{L}$, οπότε τη στιγμή αυτή θα έχουμε:

$$\mathbf{L} = \mathbf{x}_0\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}_* \Rightarrow \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}_* = \mathbf{x}_0/\mathbf{L} = \mathbf{v}_0/\boldsymbol{\omega}\mathbf{L} \quad (7)$$

Όμως θέλουμε τη στιγμή $\mathbf{t}_*$ να ισχύει $\mathbf{v}=0$, οπότε η (6) δίνει:

$$0 = \mathbf{x}_0\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}_* \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}_* = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega}\mathbf{t}_* = \boldsymbol{\pi}/2 \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε:

$$\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\pi}/2 = \mathbf{v}_0/\boldsymbol{\omega}\mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega}\mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{v}_0^2 = \mathbf{ngL} \quad (9)$$

Η (9) αποτελεί τη ζητούμενη σχέση

ii) Εξάλλου, σύμφωνα με την (8) για το χρόνο $\mathbf{t}_*$ έχουμε:

$$\mathbf{t}_* = \frac{\boldsymbol{\pi}}{2\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{ng}}}$$