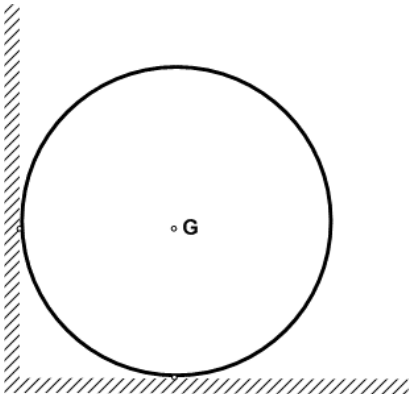
Ένας ομογενής κύλινδρος με μάζα M, ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο των δύο βάσεων του ίση με $\frac{1}{2}MR^2$, περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega_0}$ και αφήνεται χωρίς πρόσκρουση σε δίεδρη ορθή γωνία, της οποίας η μία πλευρά είναι το οριζόντιο επίπεδο, με τον άξονα του παράλληλο στην ακμή της γωνίας με τέτοιο τρόπο ώστε να *εφάπτεται ταυτόχρονα* στις δύο πλευρές της. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στον κύλινδρο και τις πλευρές της γωνίας είναι **μ**, να υπολογίσετε:



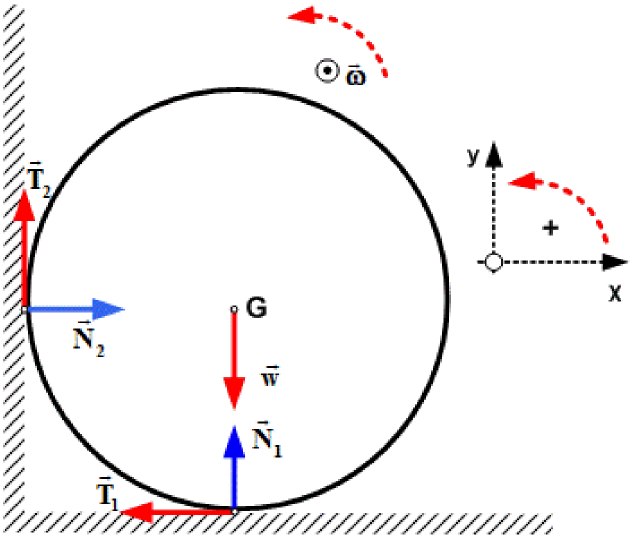
Α) το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου.

Β) τον αριθμό περιστροφών που θα πραγματοποιήσει ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει.

Να θεωρηθεί ότι σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου ο άξονας περιστροφής διατηρεί τον προσανατολισμό του.

ΛΥΣΗ

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η τομή του συστήματος με το κατακόρυφο επίπεδο. Εφόσον ο κύλινδρος ολισθαίνει ως προς τις πλευρές της γωνίας άρα η τριβή που θα εμφανιστεί είναι ολίσθησης. Για να υπάρχει επαφή με τις έδρες της γωνίας πρέπει ο κύλινδρος να στρέφεται αριστερόστροφα ώστε η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_1$ με το έδαφος, να τον ωθεί συνεχώς προς τον τοίχο και να υπάρχει συνέχεια επαφή με τις έδρες, αφού αυτό απαιτεί το πρόβλημα.



Α) Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $\frac{d\omega}{dt}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu.}$ του κυλίνδρου. Ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας, συνεπώς εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς αυτόν και θεωρώντας θετική φορά περιστροφής την αντιωρολογιακή προκύπτει:

$$\Sigma\vec{\tau}_{(G)} = I_G \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow -T_1R - T_2R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T_1 + T_2 = -\frac{MR}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.} \quad (1)$$

Το κέντρο μάζας G, είναι ήρεμο συνεπώς από τις στερεοστατικές εξισώσεις:

Στον άξονα χ:

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow N_2 - T_1 = 0 \quad (2)$$

Στον άξονα y:

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_1 + T_2 - Mg = 0 \ (3)$$

Ταυτόχρονα επειδή οι τριβές είναι τριβές ολισθήσεως έχουμε για τα *μέτρα* τους:

$$T_1 = \mu N_1 \text{ και } T_2 = \mu N_2 \ (4)$$

Από τις εξισώσεις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει:

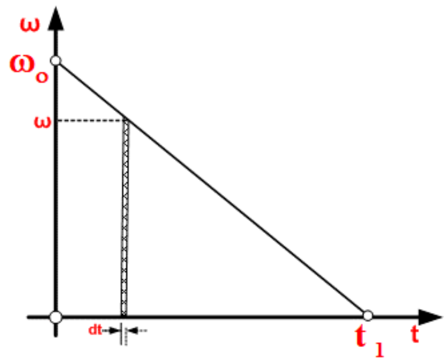
$$\boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu.} = -\frac{2\mu(\mu+1)g}{R(\mu^2+1)}} \ (5)$$

Η (5) είναι ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής t, συνεπώς η $\alpha_{\gamma\omega\nu.}$ έχει σταθερό μέτρο. Επιπλέον το πρόσημο (-), και εφόσον είχαμε υποθέσει την ωο θετική, σημαίνει ότι η κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική, οπότε αναπόφευκτα κάποια στιγμή θα πάψει να στρέφεται.

Β) Για να υπολογίσουμε τον αριθμό περιστροφών από τη στιγμή που αφήνεται ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει (ω = 0), αρκεί να βρούμε τη γωνιακή μετατόπιση που έχει διαγράψει μία ακτίνα του (ένα σημείο του) από την t=0 έως την t_1 όπου και σταματά να περιστρέφεται. Από τη σχέση (5) όπως είπαμε η $\alpha_{\gamma\omega\nu.}$ είναι σταθερή άρα:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o} \overset{t_o=0}{\Rightarrow} \omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu.} t \overset{\alpha_{\gamma\omega\nu.}<0}{\Rightarrow} \boxed{\omega = \omega_o - |\alpha_{\gamma\omega\nu.}| t} \ (6)$$

$$\text{Επιπλέον : } \omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{d\theta = \omega.dt} \ (7)$$



Από την (7) προκύπτει ότι αν κάνουμε τη γραφική παράσταση ω=ω(t) το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση, στον άξονα των χρονικών στιγμών και στις δύο κάθετες στον άξονα t οι οποίες διέρχονται από την t = 0 έως την t_1 υπολογίζεται η γωνία στροφής Δθ.

Τη στιγμή t_1 που ο κύλινδρος σταματά να στρέφεται ω = 0, οπότε από (6) έχουμε:

$$(6) \Rightarrow 0 = \omega_o - |\alpha_{\gamma\omega\nu.}| t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_o}{|\alpha_{\gamma\omega\nu.}|} \ (7)$$

Το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής δίνει τη ΔΘ, οπότε:

$$\Delta\Theta = \frac{1}{2}\omega_o \cdot t_1 \overset{(7)}{=} \frac{1}{2}\omega_o \cdot \frac{\omega_o}{|\alpha_{\gamma\omega\nu.}|} \overset{(5)}{\Rightarrow} \boxed{\Delta\Theta = \frac{\omega_o^2 \cdot R \cdot (\mu^2+1)}{4 \cdot \mu(\mu+1)g}} \ (8)$$

Τέλος ο αριθμός περιστροφών Νο που θα πραγματοποιήσει ο κύλινδρος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N_o = \frac{\Delta\Theta}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \boxed{N_o = \frac{\omega_o^2 \cdot R \cdot (\mu^2+1)}{8 \cdot \pi \cdot \mu(\mu+1)g}}$$

Νίκος Κορδατζάκης /Esse quam videri