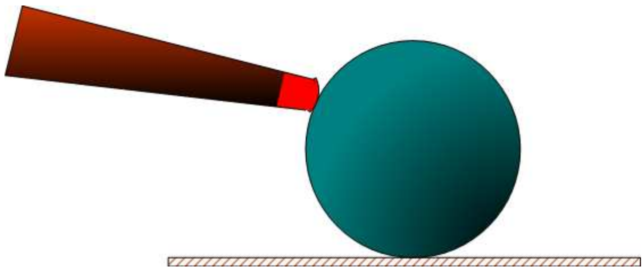
Η ΜΠΙΛΙΑ ΤΟΥ ΜΠΙΛΙΑΡΔΟΥ



Μία μπίλια μπιλιάρδου ηρεμεί πάνω σε λεία *ακίνητη* οριζόντια επιφάνεια, έχει μάζα **M** και ακτίνα R. Η μπίλια δέχεται απότομο χτύπημα (πολύ μικρής διάρκειας Δτ), από οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ σε απόσταση **h** από το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται από το κέντρο της και σε σημείο **A** το οποίο βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με το κέντρο μάζας της. Αμέσως μετά το χτύπημα αποκτά γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\boldsymbol{\omega_0}$ και ταχύτητα κέντρου μάζας $\mathbf{u_0}$.

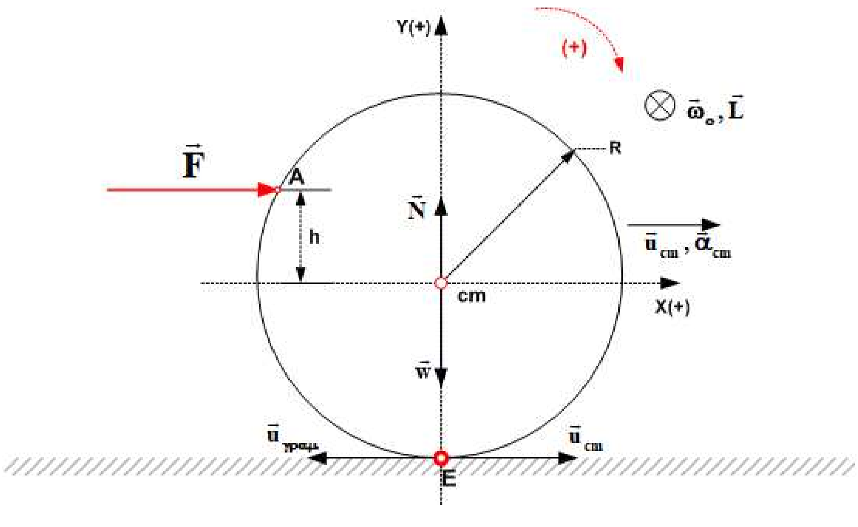
A) Αν θέλουμε η μπίλια αμέσως μετά το χτύπημα να κυλίεται τότε το σημείο Α βρίσκεται ‘‘πάνω’’ ή ‘‘κάτω’’ από το κέντρο μάζας;

B) Να βρεθεί η απόσταση h ώστε αμέσως μετά το χτύπημα η μπίλια να κυλίεται πάνω στο επίπεδο.

◆Δίνονται οι εξής πληροφορίες: ***i)*** η σχέση από την οποία υπολογίζεται η ροπή αδράνειας ομογενούς σφαίρας (μπίλιας) για τον άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$ και ***ii)*** στη διάρκεια του χτυπήματος η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή.

Ενδεικτική λύση

Το πρόβλημα το λύνει ακίνητος παρατηρητής πάνω στο οριζόντιο δάπεδο. Στο σχήμα βλέπουμε την τομή της σφαίρας στο κατακόρυφο επίπεδο, στο οποίο ανήκει το κέντρο μάζας της και η δύναμη $\vec{F}$, και οι δυνάμεις που δέχεται στη διάρκεια του χτυπήματος χωρίς τη δύναμη $\vec{F}$.Η κίνηση της σφαίρας είναι επίπεδη



A) Ας υποθέσουμε ότι το χτύπημα γίνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Ανεξάρτητα αν το Α βρίσκεται πάνω ή κάτω από το κέντρο μάζας, αυτό (το cm) θα αποκτήσει επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$ οριζόντια προς τα δεξιά, συμπέρασμα που προκύπτει από θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον άξονα χ, δηλαδή:

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow \vec{\alpha}_{cm} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (1)$$

Επειδή η σφαίρα είναι αρχικά ακίνητη, και θα επιταχυνθεί προς τα δεξιά, η ταχύτητα του κέντρου μάζας $\mathbf{u_o}$ θα είναι προς τα δεξιά. Υποθέτοντας την κίνηση της σφαίρας ως σύνθετη, μία μεταφορική και μία στροφική γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το cm της, τότε η ταχύτητα κάθε σημείου της επιφάνειας της θα είναι:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{cm}} + \vec{\mathbf{u}}_{\gamma\rho\alpha\mu.} \Rightarrow \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}} + \vec{\mathbf{u}}_{\gamma\rho\alpha\mu.} \ (2)$$

με $\vec{\mathbf{u}}_{\gamma\rho\alpha\mu.}$ την ταχύτητα του σημείου λόγω της κυκλικής κίνησης ακτίνας R, που εκτελεί γύρω από το cm με μέτρο $\mathbf{u}_{\gamma\rho\alpha\mu.} = \omega_o \mathbf{R}$ (3)

Εφόσον θέλουμε η σφαίρα να κυλίεται και επειδή ακουμπά σε ακίνητη επιφάνεια, θα πρέπει το σημείο επαφής της Ε με την επιφάνεια να έχει (συνολική) ταχύτητα μηδέν οπότε η (2), δίνει:

$\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}} + \vec{\mathbf{u}}_{\gamma\rho\alpha\mu.} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{\mathbf{u}}_{\gamma\rho\alpha\mu.} = -\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}}$, σχέση που μας δείχνει ότι η $\vec{\mathbf{u}}_{\gamma\rho\alpha\mu.}$ είναι αντίθετη της $\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}}$. Για να συμβεί αυτό πρέπει η σφαίρα να στραφεί ωρολογιακά (δεξιόστροφα) οπότε η ροπή της $\vec{\mathbf{F}}$ ως προς το cm να είναι δεξιόστροφη (κάθετη στη σελίδα με φορά προς τα μέσα).

Συμπέρασμα: το χτύπημα πρέπει να γίνει πάνω από το cm.

Β) Από το 2ρο νόμο του Newton, στην οριζόντια διεύθυνση για το χρονικό διάστημα Δτ έχουμε:

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{x}}}{\Delta\mathbf{t}} \Rightarrow \vec{\mathbf{F}} = \frac{\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{f}} - \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{i}}}{\Delta\tau} \overset{(+)\rightarrow}{\Rightarrow} \mathbf{F} = \frac{\mathbf{m}\mathbf{u}_{\mathbf{o}} - \mathbf{0}}{\Delta\tau} \Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = \frac{\mathbf{m}\mathbf{u}_{\mathbf{o}}}{\Delta\tau}} \ (4)$$

Από το 2ρο νόμο του Newton για τη στροφική κίνηση ως προς τον άξονα περιστροφής (οι δυνάμεις είναι ομοεπίπεδες, με το επίπεδό τους κάθετο στον άξονα) έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau}_{(\mathbf{cm})} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{L}}}{\Delta\tau} \Rightarrow \vec{\tau}_{\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{cm})} + \vec{\tau}_{\vec{\mathbf{w}}(\mathbf{cm})} + \vec{\tau}_{\vec{\mathbf{N}}(\mathbf{cm})} = \frac{\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{f}} - \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{i}}}{\Delta\tau} \overset{(+)\otimes}{\Rightarrow} \boxed{\mathbf{F}\cdot\mathbf{h} = \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{cm}}\cdot\omega_o}{\Delta\tau}} \ (5)$$

, $\vec{\mathbf{L}}$ η στροφορμή της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής (είναι κάθετη στη σελίδα με φορά προς τα μέσα).

Από το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) με απαλοιφή στο Δτ προκύπτει:

$$\mathbf{m}\mathbf{u}_{\mathbf{o}} = \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{cm}}\cdot\omega_o}{\mathbf{h}} \overset{\mathbf{I}_{\mathbf{cm}}=\frac{2}{5}\mathbf{m}\mathbf{R}^2}{\Rightarrow} \boxed{\mathbf{u}_{\mathbf{o}}\cdot\mathbf{h} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\omega_o\mathbf{R}^2} \ (6)$$

Τελικά για επειδή έχω κύλιση ισχύει: $\mathbf{u}_{\mathbf{o}} = \omega_o \cdot \mathbf{R}$ (7)

Από (6) και (7) προκύπτει το ζητούμενο ύψος :

$$\boxed{\mathbf{h} = \frac{\mathbf{2R}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0{,}4R} = \mathbf{40\%R}}$$

Νίκος Κορδατζάκης

nikoskordmcmlxix@gmail.com