Αντιστοιχία μεγεθών μηχανικής – ηλεκτρικής ταλάντωσης (2)

Προσθέτω κι εγώ δυο λόγια στο θέμα σχετικά με την αναλογία μηχανικής – ηλεκτρικής ταλάντωσης:

Οι σχετικές αναλύσεις που συναντάμε στη βιβλιογραφία ξεκινούν συνήθως από τη διατήρηση ενέργειας στα δύο συστήματα:

Σώμα – Ελατήριο	**Κύκλωμα L–C**
Ισχύει:	***Ισχύει:***
$\mathbf{E = U + K = σταθ.} \Longrightarrow$	$\mathbf{E = U_E + U_B = σταθ.} \Longrightarrow$
$\mathbf{E = \frac{1}{2}\cdot m\cdot υ^2 + \frac{1}{2}\cdot k\cdot x^2 = σταθ.}$	$\mathbf{E = \frac{1}{2}\cdot L\cdot i^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}\cdot q^2 = σταθ.}$
Οπότε:	***Οπότε:***
$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \Longrightarrow$	$\frac{dE}{dt} = \frac{dU_B}{dt} + \frac{dU_E}{dt} = 0 \Longrightarrow$
$\boxed{mυ\frac{dυ}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0}$ ***(1)***	$\boxed{Li\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q\frac{dq}{dt} = 0}$ ***(2)***
ή αλλιώς:	***ή αλλιώς:***
$\boxed{m\frac{dυ}{dt} + kx = 0}$ ***(3)***	$\boxed{L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q = 0}$ ***(4)***

Η αντιστοιχία ως εδώ είναι πλήρης. Από εδώ και πέρα όμως αρχίζουν τα δύσκολα:

Η ***(4)*** εκφράζει βέβαια τον 2^{ο} κανόνα του Kirchhoff. Αναφέρεται δηλαδή στις τάσεις $\mathbf{v_L}$ και $\mathbf{v_C}$ στα άκρα του πηνίου και του πυκνωτή αντίστοιχα, οι οποίες προφανώς είναι ίσες κατ' απόλυτη τιμή. Είμαστε όμως υποχρεωμένοι να τις δούμε αλγεβρικά αφού μεταβάλλονται αρμονικά με το χρόνο. Λογικό είναι λοιπόν να τις θεωρούμε αντίθετες:

$$\boxed{\mathbf{v_L + v_C = 0}} \quad ή \quad \boxed{\mathbf{v_L = -v_C}}$$

Αν βάλουμε γράμματα και τις δούμε σαν διαφορές δυναμικού $\mathbf{v_{AB}}$ και $\mathbf{v_{BA}}$ τότε είναι πάντα θετική η μία και αρνητική η άλλη. Αλλά πού θα βάλουμε το Α και που το Β; Πιστεύω, ότι πρέπει πρώτα ***να αποφασίσουμε ποιο φυσικό νόημα θέλουμε να δώσουμε στο πρόσημο κάθε τάσης*** και αν το κάνουμε αυτό δεν χρειαζόμαστε πια γράμματα.

Με ποια κριτήρια να επιλέξουμε τα πρόσημα των τάσεων, ώστε να έχουν φυσικό νόημα και να είναι ικανοποιητική και η αντιστοιχία με τη μηχανική ταλάντωση;

Ο 2^{ος} κανόνας του Kirchhoff προκύπτει από τη διατήρηση της ενέργειας. Λογικό είναι λοιπόν ***να σχετίζεται η επιλογή των προσήμων με τον ενεργειακό ρόλο*** κάθε στοιχείου.

Το σχολικό βιβλίο:

Οι συγγραφείς του σχολικού έχουν επιλέξει, σύμφωνα με τη σχέση $\boxed{v_C = {}^1/_C \cdot q}$, να θεωρούν την τάση v_C και το φορτίο **q** του πυκνωτή μεγέθη ομόσημα. Επίσης, η τάση v_C και η ένταση **i** συνδέονται με τη σχέση $\boxed{i = dq/dt}$ και θεωρούνται ***ομόσημες κατά τη φόρτιση*** του πυκνωτή και ***ετερόσημες κατά την εκφόρτιση***.

Η αντιστοιχία με το μηχανικό σύστημα είναι:

$x = A \cdot ημ(ω \cdot t + π/2)$		$q = Q \cdot ημ(ω \cdot t + π/2)$	
$υ = ω \cdot A \cdot συν(ω \cdot t + π/2)$		$i = ω \cdot Q συν(ω \cdot t + π/2)$	
$α = -ω^2 \cdot A \cdot ημ(ω \cdot t + π/2)$		$\frac{di}{dt} = -ω^2 \cdot Q ημ(ω \cdot t + π/2)$	
$F_{ελατ.} = -k \cdot x$	**;**	$v_C = {}^1/_C \cdot q$	$v_L = L \cdot \frac{di}{dt}$
$F_{ελατ.} = -k \cdot A \cdot ημ(ω \cdot t + φ_o)$		$v_C = {}^1/_C \cdot Q ημ(ω \cdot t + φ_o)$	
;		$v_L = -{}^1/_C \cdot Q ημ(ω \cdot t + φ_o)$	

Βλέπουμε ότι υπάρχει ***ασυμφωνία στην αντιστοιχία δυνάμεων – τάσεων***.

Επιπλέον, η ισχύς $p_C = v_C \cdot i$ του πυκνωτή είναι ***αρνητική όταν λειτουργεί σαν πηγή*** και ***θετική όταν λειτουργεί σαν αποδέκτης*** και το ίδιο ισχύει για την ισχύ $p_L = v_L \cdot i$ του πηνίου. ***Στα κυκλώματα όμως συνηθίζεται το αντίθετο, να θεωρούμε δηλαδή θετική την ισχύ μιας πηγής και αρνητική την ισχύ ενός αποδέκτη***.

Η τάση v_L του πηνίου στην περίπτωση αυτή είναι $v_L = L \cdot di/dt$.

Αυτό σημαίνει είτε ότι για την ΗΕΔ από αυτεπαγωγή ισχύει: $\boxed{ε_{αυτ.} = L \cdot di/dt}$, ή θα πρέπει να δεχτούμε ότι: $\boxed{ε_{αυτ.} = -v_L = -L \cdot di/dt}$.

Η επιλογή $\boxed{ε_{αυτ.} = -v_L}$ κατά τη δική μου εκτίμηση δεν είναι επιτυχής.

Μια επιλογή με φυσικό νόημα που διορθώνει τις ασυμφωνίες:

Αν θεωρήσουμε ότι η σχέση μεταξύ της τάσης v_C και του φορτίου **q** του πυκνωτή είναι:

$$\boxed{v_C = -{}^1/_C \cdot q} \quad (5)$$

τότε από την *(4)* προκύπτει ότι:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \implies -L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}q = 0 \implies \boxed{v_L + v_C = 0}$$

όπου τώρα η τάση του πηνίου είναι: $\boxed{v_L = -L \cdot di/dt}$ και:

$$\boxed{ε_{αυτ.} = v_L = -L \cdot di/dt} \quad (6)$$

Η σχέση *(5)* είναι σε πλήρη αναλογία με την αντίστοιχη σχέση $\boxed{F_{ελατ.} = -k \cdot x}$ του μηχανικού συστήματος:
Η τάση του πυκνωτή αντιστέκεται στη μετακίνηση του φορτίου κατά τη φόρτιση του πυκνωτή, και έχει τέτοια πολικότητα ώστε να τείνει να επαναφέρει τα φορτία στην κατάσταση ισορροπίας (πυκνωτής αφόρτιστος).

Η αντιστοιχία τώρα με το μηχανικό σύστημα είναι:

$\mathbf{x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \pi/2)}$		$\mathbf{q = Q \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \pi/2)}$	
$\mathbf{\upsilon = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \pi/2)}$		$\mathbf{i = \omega \cdot Q \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \pi/2)}$	
$\mathbf{\alpha = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \pi/2)}$		$\mathbf{\frac{di}{dt} = -\omega^2 \cdot Q \eta\mu(\omega \cdot t + \pi/2)}$	
$\mathbf{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = -k \cdot x}$	**;**	$\mathbf{v_C = -{}^1/_C \cdot q}$	$\mathbf{\varepsilon_{\alpha\upsilon\tau.} = v_L = -L \cdot \frac{di}{dt}}$
$\mathbf{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = -k \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_o)}$		$\mathbf{v_C = -{}^1/_C \cdot Q \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_o)}$	
;		$\mathbf{v_L = {}^1/_C \cdot Q \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_o)}$	

Η ηλεκτρική ισχύς **p=v·i** του καθενός από τα δύο στοιχεία είναι τώρα ***θετική όταν το στοιχείο λειτουργεί σαν πηγή*** και ***αρνητική όταν αυτό λειτουργεί σαν αποδέκτης***.

Το μόνο που μας λείπει ακόμα είναι η δύναμη που αντιστοιχεί στην τάση του πηνίου.

Επανερχόμενοι στον αρχικό πίνακα, έχουμε από τη σχέση (*3*):

$$\mathbf{m\frac{d\upsilon}{dt} + kx = 0} \Longrightarrow \mathbf{m \cdot \alpha + k \cdot x = 0} \text{ ή αλλιώς } \boxed{\mathbf{-m \cdot \alpha - k \cdot x = 0}} \quad (7)$$

Η τελευταία παραπέμπει στο 2^o νόμο του Νεύτωνα:

$$\boxed{\mathbf{-k \cdot x = m \cdot \alpha}} \text{ ή } \boxed{\mathbf{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = m \cdot \alpha}}$$

Υπάρχει όμως μια ποιοτική διαφορά στα δύο συστήματα:

- Στο κύκλωμα L–C ***τα κινούμενα φορτία (ρεύμα) είναι το μέσο*** με το οποίο μεταφέρεται η ενέργεια από τον πυκνωτή στο πηνίο και αντίστροφα. Μέσω των τάσεων $\mathbf{v_C}$ και $\mathbf{v_L}$ προσφέρεται στα φορτία ή αφαιρείται από αυτά ενέργεια, ώστε με το κλείσιμο της διαδρομής τους ο ισολογισμός να είναι μηδενικός.
- Στο μηχανικό σύστημα όμως η αλληλεπίδραση ελατηρίου – σώματος είναι ***άμεση***. Το ελατήριο ασκεί στο σώμα την τάση $\boxed{\mathbf{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = -kx}}$ και το σώμα ασκεί στο ελατήριο την δύναμη $\boxed{\mathbf{F_{\sigma\acute{\omega}\mu.} = -m\alpha}}$ που είναι ***η αντίδραση της προηγούμενης*** και μέσω των έργων των δύο αυτών δυνάμεων μεταφέρεται η ενέργεια από το σώμα στο ελατήριο ή αντίστροφα.

  Από τον 3^o δηλαδή νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

  $\boxed{\mathbf{F_{\sigma\acute{\omega}\mu.} = -F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.}}}$ ή αλλιώς $\boxed{\mathbf{F_{\sigma\acute{\omega}\mu.} + F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = 0}}$

  η οποία με αντικατάσταση μας δίνει τη σχέση (*7*): $\boxed{\mathbf{-m \cdot \alpha - k \cdot x = 0}}$

  Αφού όμως μελετάμε την κίνηση του σώματος πρέπει να ***λάβουμε υπόψη τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό το σώμα*** και όχι στα διπλανά.

  Φαίνεται δηλαδή να μην υπάρχει απόλυτη αντιστοιχία με τον 2^o κανόνα του Kirchhoff $\boxed{\mathbf{v_L + v_C = 0}}$ αφού δεν μπορούμε να βρούμε δύο δυνάμεις που να ασκούνται στο ίδιο σώμα και να είναι αντίστοιχες των τάσεων $\mathbf{v_C}$ και $\mathbf{v_L}$.

Μπορούμε όμως να δημιουργήσουμε μια τέτοια αντιστοιχία με το εξής τέχνασμα:

Να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας ***αβαρής συνδετικός κρίκος*** μεταξύ ελατηρίου και σώματος (μέσω του οποίου μεταφέρεται η ενέργεια – το ανάλογο του ρεύματος).

Οι δύο δυνάμεις $\boxed{\mathbf{F_{\epsilon\lambda\alpha\tau.} = -kx}}$ και $\boxed{\mathbf{F_{\sigma\acute{\omega}\mu.} = -m\alpha}}$ που προηγουμένως αποτελούσαν ζευγάρι δράσης – αντίδρασης, ***ασκούνται τώρα και οι δύο στον κρίκο από το ελατήριο και από το σώμα αντίστοιχα και σύμφωνα με τον 1^ο^ νόμο του Νεύτωνα έχουν πάντα συνισταμένη μηδέν*** (αφού ο κρίκος είναι αβαρής).

Έτσι η ενέργεια μεταφέρεται μέσω του συνδετικού κρίκου από το ελατήριο στο σώμα και αντίστροφα, όπως και στο ηλεκτρικό κύκλωμα μεταφέρεται μέσω του ρεύματος από τον πυκνωτή στο πηνίο.

Η αντιστοιχία τώρα με το μηχανικό σύστημα γίνεται πλήρης:

$\mathbf{x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \pi/2)}$		$\mathbf{q = Q \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \pi/2)}$	
$\mathbf{\upsilon = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \pi/2)}$		$\mathbf{i = \omega \cdot Q \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \pi/2)}$	
$\mathbf{\alpha = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \pi/2)}$		$\mathbf{\frac{di}{dt} = -\omega^2 \cdot Q \eta\mu(\omega \cdot t + \pi/2)}$	
$\mathbf{F_{\epsilon\lambda\alpha\tau.} = -k \cdot x}$	$\mathbf{F_{\sigma\acute{\omega}\mu.} = -m \cdot \alpha}$	$\mathbf{v_C = -{}^1/_C \cdot q}$	$\mathbf{\varepsilon_{\alpha\upsilon\tau.} = v_L = -L \cdot \frac{di}{dt}}$
$\mathbf{F_{\epsilon\lambda\alpha\tau.} = -k \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_o)}$		$\mathbf{v_C = -{}^1/_C \cdot Q \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_o)}$	
$\mathbf{F_{\sigma\acute{\omega}\mu.} = k \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_o)}$		$\mathbf{v_L = {}^1/_C \cdot Q \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_o)}$	

Διονύσης Μητρόπουλος

dmitro@sch.gr