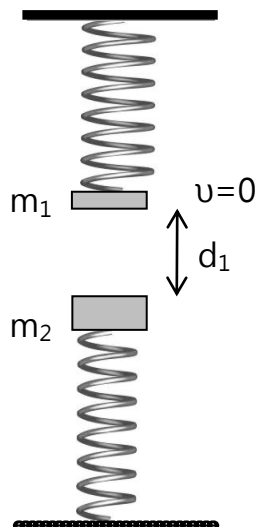


ΘΕΜΑ Δ

Ένα σώμα μάζας $m_1=2\text{kg}$, ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_1=200\text{N/m}$, το πάνω άκρο του οποίου στερεώνεται σε οροφή. Την χρονική στιγμή $t=0$, εκτοξεύουμε το σώμα m_1 προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_0=4\text{m/s}$. Κάτω από το ελατήριο σταθεράς K_1 και στη διεύθυνση του άξονά του, έχει τοποθετηθεί δεύτερο κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς K_2 στο πάνω άκρο του οποίου ισορροπεί σώμα μάζας $m_2=6\text{Kg}$ ενώ το κάτω άκρο του είναι ακλόνητα συνδεδεμένο στο έδαφος. Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δυο σωμάτων όταν το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στην ανώτερη θέση της τροχιάς του είναι $d_1=0,4\text{m}$. Κατά την κάθοδό του το σώμα μάζας m_1 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα μάζας m_2 . Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται σταματά σε μια θέση που απέχει απόσταση $d_2=0,5\text{m}$ από την ανώτερη θέση της τροχιάς του σώματος m_1 .



- α) Να υπολογίσετε το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα μάζας m_1 , μέχρι την στιγμή της σύγκρουσης του με το σώμα μάζας m_2 .
- β) Να αποδείξετε ότι η κίνηση του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση, είναι μια νέα ΑΑΤ, και να υπολογίσετε το πλάτος της.
- γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των περιόδων $\frac{T_1}{T'}$, των δυο ταλαντώσεων πριν και μετά την κρούση καθώς και την χρονική στιγμή κατά την οποία το συσσωμάτωμα θα βρεθεί για πρώτη φορά μετά την χρονική στιγμή $t=0$, στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσης του.

δ) Να βρείτε την επιτάχυνση του συσσωματώματος την χρονική στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος μειώνεται στο μισό για πρώτη φορά μετά την κρούση

ε) Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος για την χρονική στιγμή του ερωτήματος (ε).

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για τη θέση ισορροπίας του m_1 :

$$\Sigma F=0 \Rightarrow W_1 = \vec{F}_{\epsilon\lambda_1} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1\text{m}$$

$$v_0 = v_{\max} = \omega A_1 \Rightarrow A_1 = 0,4\text{m}$$

$$\text{Και } T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{K_1}} = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

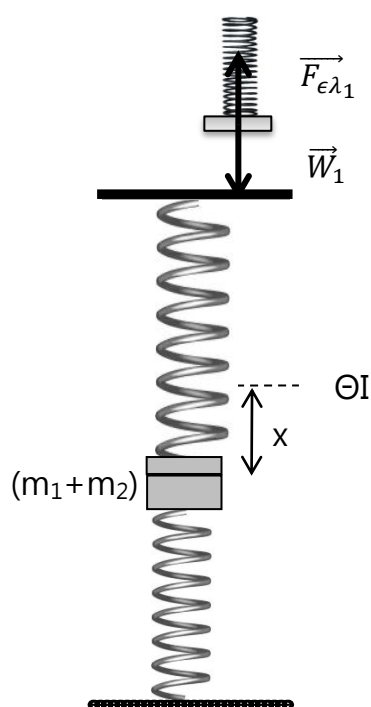
β) στη ΘΙ του συσσωματώματος

$$\Sigma F=0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g = (k_1 + k_2)\Delta l$$

Σε μια τυχαία θέση σε απόσταση x από τη ΘΙ:

$$\Sigma F = (m_1 + m_2)g - (k_1 + k_2)(\Delta l + x) = -(k_1 + k_2)x$$

Άρα το συσσωμάτωμα εκτελεί αατ με $D=k_1+k_2$.



γ) Η κρούση των δυο σωμάτων λαμβάνει

χώρα στη ΘΙ της αατ που εκτελεί το m_1 , η οποία είναι ταυτόχρονα και ΘΙ του m_2 , οπότε η κρούση συμβαίνει τελικά στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g = F_{\epsilon\lambda_1} + F_{\epsilon\lambda_2}$$

και η κοινή ταχύτητα μετά την κρούση θα είναι η μέγιστη για την αατ του συσσωματώματος.

Από ΑΔΟ στη θέση κρούσης:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = 1 \text{ m/s}$$

Επίσης το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι

$$A = d_2 - d_1 = 0,1m ,$$

$$\text{οπότε } V = \omega_{\Sigma} A \Rightarrow \omega_{\Sigma} = 10 \frac{r}{s}$$

$$\text{και } D = (m_1 + m_2)\omega_{\Sigma}^2 = 800 \text{ N/m. Άρα και } k_2 = 600 \text{ N/m.}$$

Ο λόγος των δυο περιόδων ταλάντωσης πριν και μετά την κρούση είναι:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}}} = 1$$

Ο χρόνος που διαρκεί η κίνηση του m_1 έως την κρούση του με το m_2 είναι $\Delta t_1 = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{10} \text{ s}$

Και ο χρόνος που χρειάζεται το συσσωμάτωμα για να βρεθεί στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσής του είναι

$$\Delta t_2 = 3 \frac{T}{4} = \frac{3\pi}{20} \text{ s}$$

Οπότε ο συνολικός χρόνος είναι:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\pi}{4} \text{ s}$$

δ) $v_{\Sigma} = \frac{V}{2} = 0,5 \frac{m}{s}$ και από την ΑΔΕΤ

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x = +\frac{\sqrt{3}}{20}m \text{ για πρώτη φορά.}$$

Η επιτάχυνση βρίσκεται από τη εφαρμογή του 2^{ου} νόμου:

$$\Sigma F = (m_1 + m_2) \cdot a \Rightarrow a = \frac{-Dx}{(m_1 + m_2)} = -5\sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

ε) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στη θέση $x = +\frac{\sqrt{3}}{20}m$ θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot v = -D \cdot x \cdot v = -20\sqrt{3} \frac{J}{s}$$

Για το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής θα μπορούσε κάποιος να βρει πρώτα το μέτρο του και μετά να τον θέσει αρνητικό αφού το

συσσωμάτωμα απομακρύνεται από τη ΘΙ της αατ που εκτελεί με αποτέλεσμα τη μείωση της ταχύτητας του.

A. Αθανασιάδης