ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΚΑΙ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ (2)

Σε συνέχεια προηγούμενης ανάρτησης μου με τίτλο "Στρεφόμενοι δίσκοι και περί στροφορμής και με αφορμή παλαιότερη ανάρτηση του φίλου Δ. Μάργαρη "Ισορροπία – ροπές και κάθετη αντίδραση" και τη σχετικά πρόσφατη του συναδέλφου κ. Γ. Μιχαλόπουλου "Σημείο εφαρμογής παράλληλων δυνάμεων", θα επιχειρήσω να δώσω μία θεωρητική απόδειξη για το πότε ένα στερεό σώμα βρίσκεται σε στροφική ισορροπία, δηλαδή δεν επιταχύνεται στροφικά ($\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}=0$).

Καταρχάς ο γενικευμένος νόμος της στροφικής κίνησης $\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}$ γράφεται με τη μορφή αυτή με την προϋπόθεση ότι η στροφορμή του σώματος (ή συστήματος) και οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων υπολογίζονται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων. Αν η προϋπόθεση αυτή δεν ισχύει τότε, όπως έχω δείξει σε προηγούμενη ανάρτηση με τίτλο "Στρεφόμενοι δίσκοι και περί στροφορμής", η έκφραση του γενικευμένου νόμου είναι :

$$\frac{d\vec{L}'(O')}{dt}=\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}-\vec{r}'\times m\vec{a}_0\Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}'(O')}{dt}=\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}+\vec{a}_0\times m\vec{r}'\Rightarrow\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}=\frac{d\vec{L}'(O')}{dt}-\vec{a}_0\times m\vec{r}'\quad(1),$$

όπου ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής και οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων έχουν υπολογιστεί ως προς ένα επιταχυνόμενο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το O', m= η μάζα ενός υλικού σημείου και $\vec{a}_0$ = η επιτάχυνση αυτού του συστήματος (μη αδρανειακού) ως προς την αρχή O ενός αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων και $\vec{r}'$ = το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου ως προς την αρχή O' . Γράφοντας αντίστοιχες σχέσεις με την (1) για κάθε υλικό σημείο του σώματος ή του συστήματος και αθροίζοντας καταλήγουμε στη σχέση $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}=\frac{d\vec{L}'(O')}{dt}-\vec{a}_0\times\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i'$ (2).

Για να έρθει η σχέση (2) στη μορφή $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}=\frac{d\vec{L}'(O')}{dt}$, πρέπει ο όρος $\vec{a}_0\times\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i'$ να μηδενίζεται. Αυτό μπορεί να συμβεί στις εξής τρεις περιπτώσεις:

1. Ο παράγων $\vec{a}_0=0$, δηλαδή το σημείο αναφοράς (O') υπολογισμού ροπών και στροφορμών , να μην επιταχύνεται. Σ΄ αυτή την περίπτωση το σύστημα συντεταγμένων με αρχή το (O') είναι αδρανειακό και η συνθήκη $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}=0$ οδηγεί στο συμπέρασμα $\frac{d\vec{L}'(O')}{dt}=0$. Αν υποθέσουμε ότι αναφερόμαστε σ' ένα στερεό σώμα με σταθερή ροπή αδρανείας , τότε η σχέση $\frac{d\vec{L}'(O')}{dt}=0$ γράφεται: $I_{(O')}\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}=0\Rightarrow\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}=0$. Δηλαδή, όταν το $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}$ υπολογίζεται ως προς οποιοδήποτε σημείο O' του συστήματος συντεταγμένων (το οποίο τώρα είναι αδρανειακό),άρα και ως προς οποιδήποτε σημείο του σώματος, θα ικανοποιεί τη συνθήκη $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}=0$. Με απλά λόγια: Όταν το σώμα του οποίου εξετάζουμε τη στροφική ισορροπία δεν επιταχύνεται ($\vec{a}_0=0$) η συνθήκη $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}=0$ μπορεί να εφαρμόζεται ως προς οποιδήποτε σημείο του σώματος του οποίου την στροφική ισορροπία μελετάμε.
2. Η αρχή του μη αδρανειακού συστήματος αναφοράς με αρχή το O' να ταυτίζεται με το κέντρο μάζας (cm). Τότε, από τον ορισμό του κέντρου μάζας συστήματος σωματιδίων για το

διάνυσμα θέσης του $\vec{r}'_{cm}$, έχουμε: $\vec{r}'_{cm} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}'_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ (3), από όπου προκύπτει ότι όταν $\vec{r}'_{cm} = 0$,

τότε και $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}'_i = 0$. Δηλαδή αποδεικνύεται αυτό που αναφέρει ο Δ. Μάργαρης , ότι, εάν το

$\Sigma \vec{\tau}_{εξ(O')} = 0$ ως προς το κέντρο μάζας, τότε, ακόμα και αν αυτό επιταχύνεται (το cm) ο

νόμος της στροφικής κίνησης γράφεται $\dfrac{d\vec{L}'(O')}{dt} = 0$ και αν υποθέσουμε ότι αναφερόμαστε σ'

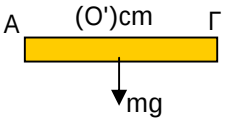
ένα στερεό σώμα με σταθερή ροπή αδρανείας, με τη μορφή $I_{(O')} \vec{\alpha}_{γων} = 0$,

άρα η συνθήκη $\Sigma \vec{\tau}_{εξ(O')} = 0$ εξασφαλίζει ότι $\vec{\alpha}_{γων} = 0$. Στο παράδειγμά

του με τη ράβδο (Σχήμα 1) που αφήνεται να πέσει ελεύθερα το κέντρο μάζας της επιταχύνεται υπό την επίδραση του βάρους, αλλά η συνθήκη

ισορροπίας $\Sigma \vec{\tau}_{εξ(O')} = 0$, ικανοποιείται αφού το Ο' ταυτίτεζαι με το κέντρο

μάζας (cm) και ο φορέας του βάρους διέρχεται από το cm.Με απλά λόγια:



Σχήμα 1

Όταν το σώμα του οποίου εξετάζουμε τη στροφική ισορροπία επιταχύνεται, ($\vec{a}_0 \neq 0$) η

συνθήκη $\Sigma \vec{\tau}_{εξ(O')} = 0$ πρέπει να εφαρμόζεται <u>ΜΟΝΟΝ</u> ως προς το κέντρο μάζας του σώματος του οποίου την ισορροπία μελετάμε.

3. Ακόμη και αν η αρχή (Ο') του μη αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων δεν ταυτίζεται με το κέντρο μάζας (cm) ,από τη σχέση (3) : $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}'_i = \vec{r}'_{cm} \sum_{i=1}^{n} m_i$ ο παράγοντας $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}'_i$ εκφράζει

ένα διάνυσμα συγγραμικό με το διάνυσμα $\vec{r}'_{cm}$,άρα διάνυσμα που διέρχεται από το κέν τρο

μάζας.Άν και το διάνυσμα $\vec{a}_0$ έχει φορέα που διέρχεται από το κέντρο μάζας , τότε το εξωτερικό

γινόμενο $\vec{a}_0 \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}'_i$ μηδενίζεται, διότι εάν το γράψουμε με τη μορφή $\vec{a}_0 \times \vec{r}'_{cm} \sum_{i=1}^{n} m_i$,

φαίνεται ότι πρόκειται για γινόμενο δύο διανυσμάτων συγγραμμικών ,δηλαδή $\vec{a}_0 \times \vec{r}'_{cm} \sum_{i=1}^{n} m_i = 0$.

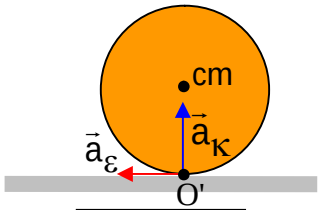
Άρα ο νόμος της στροφικής κίνησης γράφεται πάλι με τη μορφή $\Sigma \vec{\tau}_{εξ(O')} = \dfrac{d\vec{L}'(O')}{dt}$ και αν υποθέσουμε ότι αναφερόμαστε σ' ένα στερεό σώμα με σταθερή ροπή αδρανείας με τη μορφή

$\Sigma \vec{\tau}_{εξ(O')} = I_{(O')} \vec{\alpha}_{γων}$. Η συνθήκη $\Sigma \vec{\tau}_{εξ(O')} = 0$, εξασφαλίζει ότι $\vec{\alpha}_{γων} = 0$.Με απλά λόγια:

Όταν η επιτάχυνση του $\vec{a}_0$ του σημείου Ο' έχει φορέα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος ,τότε ο νόμος της στροφικής κίνησης , με την προϋπόθεση ότι γράφεται με τη μορφή: $\Sigma \vec{\tau}_{εξ(O')} = I_{(O')} \vec{\alpha}_{γων}$, όταν $\Sigma \vec{\tau}_{εξ(O')} = 0$, εξασφαλίζει

ότι $\vec{\alpha}_{γων} = 0$.

Ας δούμε αυτή την περίπτωση στην κύλιση χωρίς ολίσθηση στερεού σώματος κυκλικής διατομής σε οριζόντιο επίπεδο.
Θεωρούμε ότι το σώμα στρέφεται περί στιγμιαία ακίνητο άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής Ο' και είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησηςτου σώματος.Το σημείο Ο' έχει :



Σχήμα 2

$\vec{a}_\kappa$ =κεντρομόλο επιτάχυνση με φορέα που διέρχεται από το κέντρο μάζας Ο και $\vec{a}_\varepsilon$ =επιτρόχιο επιτάχυνση με οριζόντια διεύθυνση . Δηλαδή η επιτάχυνση του σημείου Ο΄ είναι :

$\vec{\alpha}_{(O')} = \vec{a}_\kappa + \vec{a}_\varepsilon$ (Σχήμα 2) και για να κατευθύνεται προς το κέντρο μάζας Ο πρέπει $\vec{a}_\varepsilon = 0$ άρα και $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = 0$ δηλαδή έχουμε στροφική ισορροπία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1.Όλα τα παραπάνω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι η συνολική μάζα του συστήματος διατηρείται σταθερή. Στην αντίθετη περίπτωση η σχέση (2) γίνεται αρκετά πολύπλοκη.

2. Για κάθε μία από τις τρείς παραπάνω περιπτώσεις η σχέση: $\Sigma \vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')} = \frac{d\vec{L}'(O')}{dt}$, όταν

$$I_{(O')} \neq \text{σταθερή, δίνει } \Sigma \vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')} = \frac{dI_{(O')}}{dt}\omega + I_{(O')}\frac{d\omega}{dt} .$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Είναι γνωστό ότι οι μαθητές φθάνουν στην Γ' τάξη του Λυκείου χωρίς ν α έχουν διδαχθεί εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων και ότι στην παρουσίαση της ύλης προηγείται η μελέτη της ισορροπίας στερεού και ακολουθεί η παρουσίαση του Θεμελιώδους Νόμου της Στροφικής κίνησης και η στροφορμή, παρόλο που στο σύνολο σχεδόν της βιβλιογραφίας προηγείται ο ορισμός της στροφορμής και του Θ.Ν της στροφικής κίνησης. Θα μπορούσαμε να τονίσουμε ότι ο Θ.Ν της Στροφικής κίνησης ισχύει με την μορφή $\Sigma \vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')} = I_{(O')}\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ <u>ΜΟΝΟΝ ΟΤΑΝ ΙΣΧΥΟΥΝ:</u> α. $I_{(O')}$ =σταθερή και β. το σημείο Ο' δεν επιταχύνεται (αφού τα περί μη αδρανειακού σύστήματος αποτελούν "terra incognita") και να παρουσιάσουμε απλά την σχέση $\Sigma \vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')} = \frac{d\vec{L}'(O')}{dt} - \vec{a}_0 \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i'$,εξηγώντας ότι αποτελεί την έκφραση του Θ.Ν, όταν το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζουμε τις ροπές επιταχύνεται μεταφορικά ($\vec{a}_0 \neq 0$), προκειμένου ο μαθητής να καταλάβει ότι, όταν το σώμα επιταχύνεται μεταφορικά, η συνθήκη $\Sigma \vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')} = 0$ οδηγεί στο συμπέρασμα: $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = 0$ (στροφική ισορροπία), όταν το Ο' δεν είναι <u>το οποιοδήποτε σημείο αλλά αποκλειστικά το ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ</u> (περίπτωση 2).

2. Επειδή σε παλαιότερη συζήτηση στο δίκτυο είχε τεθεί το θέμα σχετικά με τη χρήση των όρων "μεταφορική ισορροπία", "στροφική ισορροπία" κτλ, από την παραπάνω μελέτη προκύπτει ότι, ανεξάρτητα από το πώς κάποιος ορίζει την ισορροπία, παραμένει το γεγονός ότι σε όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις το σώμα δεν επιταχύνεται στροφικά δηλαδή $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = 0$.