3

ΑΠΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ:

Για την λύση των ασκήσεων που ακολουθούν θα χρειασθούμε:

1. Την (διάσημη) εξίσωση του EINSTEIN:

$$\boxed{E = mc^2}$$

2. Τον νόμο των STEFAN-BOLTZMANN:

$$\boxed{L = 4\pi R^2 \sigma T^4}$$

(Ακτινοβολία μέλανος σώματος)

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΦΥΣΙΚΟΣ

MSc. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2011

ΑΣΚΗΣΗ 1

Τα πιο ισχυρά quasars έχουν φωτεινότητα περίπου 10^{40} W. Πόση ποσότητα μάζας ανά δευτερόλεπτο πρέπει να καταναλώνει η κεντρική μελανή οπή για να παράγει αυτή τη φωτεινότητα; Υπολογίστε πόσες ηλιακές μάζες καταβροχθίζει η μελανή οπή σ' ένα έτος. Υποθέστε ότι μόνο το 10% της μάζας που καταναλώνεται ακτινοβολείται.

ΛΥΣΗ

Η κεντρική μελανή οπή έχει «απόδοση» 10% , δηλαδή συντελεστή (απόδοσης) n = 0,1. Επομένως για να έχει το quasar φωτεινότητα 10^{40} W, η οπή πρέπει να «καταβροχθίζει» μάζα με τέτοιο ρυθμό ώστε να αντιστοιχεί σε ισχύ:

$$P = \frac{10^{40}}{0,1} W = 10^{41} W = 10^{41} \frac{J}{s}$$

Έτσι λοιπόν σε 1 s , η κατανάλωση μάζας από την μαύρη τρύπα θα είναι:

$$mc^2 = P \Rightarrow m = \frac{P}{c^2} \Rightarrow m = \frac{10^{41} \frac{J}{s}}{(3.10^8 \frac{m}{s})^2} \Rightarrow m = 1,11.10^{24} \frac{Kg}{s}$$

(Παρατηρήστε ότι: $\frac{\frac{J}{s}}{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{N\frac{m}{s}}{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{Kg\frac{m^2}{s^3}}{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{Kg}{s}$).

Τώρα παίρνοντας ότι ένα έτος ισοδυναμεί με $3,15.10^7$ s, έχουμε ότι σε ένα έτος η μαύρη τρύπα καταναλώνει ποσότητα μάζας ίση προς:

$$M = 1,11.10^{24} \frac{Kg}{s} .3,15.10^7 \frac{s}{y} = 3,50.10^{31} Kg$$

Με δεδομένο ότι η μάζα του Ήλιου είναι:

$$M_{\odot} = 1,99.10^{30} Kg ,$$

Η μαύρη τρύπα καταβροχθίζει:

$$k = \frac{M}{M_{\odot}} = \frac{3,50.10^{31} Kg}{1,99.10^{30} Kg} = 17,6$$

Δηλαδή 17,6 ηλιακές μάζες ανά έτος!

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μετατοπίσεις Doppler έχουν δείξει ότι ιονισμένο αέριο στον πυρήνα του Γαλαξία M87 περιστρέφεται με ταχύτητα 800 Km/s, σε μια ακτίνα 60 ετών φωτός. Υπολογίστε τη μάζα μέσα σε ακτίνα 60 ετών φωτός από το γαλαξιακό κέντρο.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι εντός της σφαίρας με ακτίνα R=60ly, έχουμε σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας, έτσι ώστε το ιονισμένο αέριο να δέχεται βαρυτική δύναμη, ωσάν όλη η μάζα να ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο σφαίρας, όπως προβλέπει για την περίπτωση αυτή η θεωρία βαρύτητας του Νεύτωνα.

Ας υποθέσουμε επίσης ότι το ιονισμένο αέριο έχει μάζα m. (Παρακάτω θα δούμε ότι η μάζα απλοποιείται). Επίσης ας θεωρήσουμε ότι εντός της σφαίρας υπάρχει μάζα M, ωσάν να είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο. Στο μοντέλο λοιπόν αυτό η (Νευτώνεια) δύναμη βαρύτητας πάνω στη μάζα m, «παίζει» το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης που αναγκάζει τη μάζα m να περιστρέφεται. Η χρήση μη-σχετικιστικής μηχανικής δικιολογείτε από το γεγονός ότι: $\upsilon \ll c$

Έχουμε λοιπόν:

$$F_N = F_k \Rightarrow G\frac{mM}{R^2} = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$$

$$M = \frac{\upsilon^2 R}{G} \qquad (1)$$

Στη σχέση λοιπόν (1) έχουμε:

$$\upsilon = 800\frac{Km}{s} = 8.10^5\frac{m}{s}$$

Και:

$$R = 60ly = 60.9,46.10^{15}m = 5.68.10^{17}m$$

$$G = 6,67.10^{-11}Nm^2Kg^{-2}$$

Οπότε:

$$M = \frac{(8.10^5\frac{m}{s})^2 5.68.10^{17}m}{6,67.10^{-11}Nm^2Kg^{-2}},$$

ή

$$M \simeq 5,45.10^{39}\,Kg$$

(Παρατηρήστε ότι: $\dfrac{\dfrac{m^2}{s^2}m}{Nm^2Kg^{-2}} = \dfrac{\dfrac{m^3}{s^2}}{Kg\dfrac{m}{s^2}\dfrac{m^2}{Kg^2}} = Kg$).

Με δεδομένη τη μάζα του Ήλιου:

$$M_{\odot} = 1,99.10^{30}\,Kg\,,$$

Η μάζα M που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα των 60 ετών φωτός, ισοδυναμεί με:

$$\boxed{\frac{5,45.10^{39}\,Kg}{1,99.10^{30}\,Kg} \simeq 2,7.10^{9} \text{ ηλιακές μάζες.}}$$

Πρόκειται δηλαδή για μια τεράστια ποσότητα μάζας (συγκεντρωμένης στη σχετικά μικρή αυτή περιοχή) που παραπέμπει (ενδεχομένως) στην ύπαρξη μιας μαύρης τρύπας στον πυρήνα του Γαλαξία M87.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ο Betelguese είναι ένας από του γνωστούς κόκκινους γίγαντες και ανήκει στον αστερισμό του Ωρίωνα. Έχει φωτεινότητα $1{,}4.10^{31}$ W και επιφανειακή θερμοκρασία 3400 K. Πόση είναι η ακτίνα του;

ΛΥΣΗ

Υποθέτοντας ότι οι αστέρες ακτινοβολούν ως μέλανα σώματα, η φωτεινότητα, η θερμοκρασία επιφανείας και η ακτίνα θα συνδέονται μέσω του νόμου των Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Έχουμε λοιπόν:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

ή

$$R^2 = \frac{L}{4\pi\sigma T^4}$$

ή

$$R = \frac{1}{2T^2}\sqrt{\frac{L}{\pi\sigma}}$$

ή

$$R = \frac{1}{2(3400K)^2}\sqrt{\frac{1,4.10^{31}W}{3,14.6,67.10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}}}$$

ή

$$R = \frac{1}{2.11,56.10^6 K^2}.8,18.10^{18} mK^2$$

ή

$$R = 3,54.10^{11} m$$

Η ακτίνα του Ήλιου είναι:

$$R_{\odot} = 6,96.10^8 m$$

Οπότε η ακτίνα του Betelguese, είναι:

$$R = \frac{3,54.10^{11}}{6,96.10^8} R_{\odot} ,$$

Δηλαδή:

$$\boxed{R \simeq 500R_{\odot}} \qquad \left(\frac{3,54.10^{11}}{6,96.10^8} = 508,62 \right)$$

Έχοντας λοιπόν επιφανειακή θερμοκρασία T=3400K και ακτίνα $R \simeq 500R_{\odot}$, ο Betelguese (a-Orionis) δίκαια ανήκει στους κόκκινους γίγαντες.

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

johnfior58@gmail.com