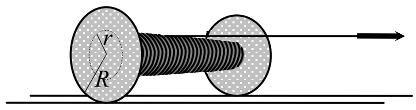
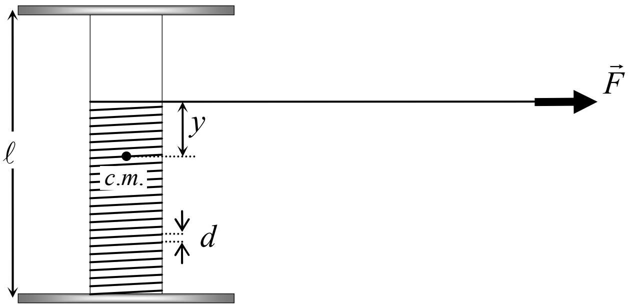
Το καρούλι του σχήματος είναι κατασκευασμένο από δύο λεπτούς ομογενείς δίσκους μάζας m και ακτίνας R, που είναι κολλημένοι στις δύο βάσεις του κυλινδρικού τμήματος μίας βίδας (το τμήμα που έχει το σπείρωμα) μάζας $4m$ και ακτίνας $r = \frac{R}{2}$.



Σχήμα 1

Αρχικά η κατασκευή ισορροπεί σε οριζόντιο δάπεδο. Το «βήμα» της βίδας είναι $d \ll r$ και το μήκος της ℓ. Στο αυλάκι της βίδας και σε όλο το μήκος της έχουμε τυλίξει αβαρές λεπτό νήμα το οποίο είναι δεμένο στο ένα άκρο (στην ένωση της βίδας και του ενός δίσκου) και το άλλο του άκρο εκτείνεται σε οριζόντια διεύθυνση και κάθετα στον άξονα της βίδας. Ασκώντας δύναμη στο ελεύθερο άκρο του νήματος θέτουμε το καρούλι σε κίνηση φροντίζοντας η διεύθυνση του ξετυλιγμένου τμήματος να παραμένει οριζόντια και κάθετη στον άξονα περιστροφής. Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ δίσκων και δαπέδου είναι μ.



Σχήμα 2

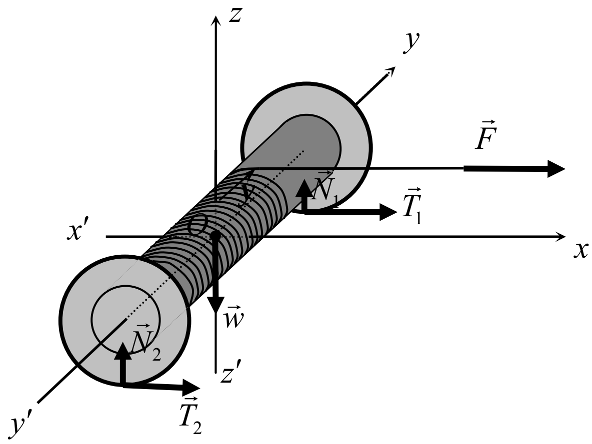
Α. Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης ώστε να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση των δίσκων σαν συνάρτηση της μετατόπισης του κέντρου μάζας του συστήματος.

Β. Βρείτε σε πόσο χρόνο θα ξετυλιχθεί όλο το νήμα και την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος τότε αν, το μέτρο της δύναμης είναι σταθερό και ίσο με το μέγιστο επιτρεπόμενο όριο ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου μάζας m και ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του καθώς και εκείνη ομογενούς κυλίνδρου μάζας m και ακτίνας βάσης r, ως προς τον άξονά του, υπολογίζονται από τη σχέση: $I = \frac{1}{2} m r^2$.

Λύση

Έστω ότι το κέντρο μάζας του στερεού κινείται στον άξονα $x'x$ και ο άξονας περιστροφής του, αρχικά ταυτίζεται με τον άξονα $y'y$, ενός συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3

Αφού η κίνηση του κέντρου μάζας περιορίζεται στον άξονα $x'x$ θα έχουμε,

$$\sum F_x = m_{ολ} a_{cm}$$

ή

$$F + T_1 + T_2 = 6ma_{cm} \qquad (1)$$

και

$$\sum F_y = \sum F_z = 0$$

ή

$$N_1 + N_2 - w = 0 \qquad (2)$$

Επειδή ο προσανατολισμός του άξονα περιστροφής δεν αλλάζει, δηλαδή το στερεό δεν περιστρέφεται γύρω από τους άξονες $x'x$ και $z'z$ θα πρέπει:

$$\sum \tau_{(x'x)} = 0 \text{ ή } N_1 \frac{\ell}{2} - N_2 \frac{\ell}{2} = 0 \text{ ή}$$

$$N_1 = N_2 \qquad (3)$$

και επίσης,

$$\sum \tau_{(z'z)} = 0 \text{ ή } T_2 \frac{\ell}{2} - T_1 \frac{\ell}{2} - Fy = 0 \text{ ή}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{2F}{\ell} y \tag{4}$$

Για την στροφική κίνηση του στερεού εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης,

$$\sum \tau_{(y'y)} = I a_{\gamma\omega\nu}$$

ή

$$Fr - \left(T_1 + T_2\right) R = I a_{\gamma\omega\nu} \tag{5}$$

όπου I η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα $y'y$ για την οποία βρίσκουμε,

$$I = 6mr^2$$

Αφού έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση θα ισχύει επίσης,

$$a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R \tag{6}$$

Από τις σχέσεις (1), (4), (5), (6) βρίσκουμε,

$$T_1 = F\left(0{,}1 - \frac{y}{\ell}\right) \tag{7.a}$$

$$T_2 = F\left(0{,}1 + \frac{y}{\ell}\right) \tag{7.b}$$

<u>*Παρατήρηση:*</u> *Από τη συμμετρία του προβλήματος ήταν αναμενόμενη η σχέση,* $T_1\left(y\right) = T_2\left(-y\right)$

Από τις (2) και (3) προκύπτει,

$$N_1 = N_2 = N = 3mg$$

και η απαίτηση για μη ολίσθηση επιβάλλει,

$$\left|T_1\right| \le \mu N \tag{8}$$

και

$$\left|T_2\right| \le \mu N \tag{9}$$

για κάθε τιμή του y στο διάστημα $\left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right]$. Επειδή όπως παρατηρούμε,

$$\left|T_1\right| < \left|T_2\right| \text{ για } y > 0$$

και

$$\left|T_1\right| > \left|T_2\right| \text{ για } y < 0,$$

αρκεί να ισχύει η (8) για $y<0$ και η (9) για $y>0$. Επομένως, αντικαθιστώντας από τις εξισώσεις (7.a) και (7.b) βρίσκουμε,

$$F \le \frac{3\mu mg}{0,1+\frac{|y|}{\ell}} \tag{10}$$

Τη στιγμή που το ξετυλιγμένο νήμα εφάπτεται στη θέση y, όπως φαίνεται στα σχήματα, το στερεό έχει εκτελέσει $\frac{\frac{\ell}{2}-y}{d}$ περιστροφές και το κέντρο μάζας έχει μετατοπιστεί κατά, $x=2\pi R\frac{\frac{\ell}{2}-y}{d}$. Από την τελευταία έχουμε,

$$y=\frac{\ell}{2}-\frac{d}{4\pi r}x$$

Αντικαθιστώντας στην (10) βρίσκουμε,

$$F \le \frac{3\mu mg}{0,1+\left|\frac{1}{2}-\frac{d}{4\pi r\ell}x\right|} \qquad 0 \le x \le \frac{4\pi r\ell}{d}$$

Άρα

$$F_{\max} = \frac{3\mu mg}{0,1+\left|\frac{1}{2}-\frac{d}{4\pi r\ell}x\right|} \qquad 0 \le x \le \frac{4\pi r\ell}{d} \tag{11}$$

B.

Αν η F είναι σταθερή θα πρέπει το μέτρο της να μην υπερβαίνει την ελάχιστη τιμή που δίνει η εξίσωση (11) και η οποία είναι,

$$F=5\mu mg$$

και αντιστοιχεί στις θέσεις $x=0$ και $x=\frac{4\pi r\ell}{d}$, (στην αρχή και το τέλος του ξετυλίγματος). Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή της F και τις T_1, T_2 από τις εξισώσεις (7.a) και (7.b) στην εξίσωση (1) βρίσκουμε,

$$a_{cm}=\mu g$$

Η μετατόπιση του κέντρου μάζας μέχρι να ξετυλιχθεί όλο το νήμα θα ισούται με το γινόμενο του πλήθους των περιστροφών που θα έχει εκτελέσει το σώμα επί το μήκος της περιφέρειας των δίσκων. Δηλαδή,

$$x_{cm} = \frac{\ell}{d} 2\pi R = \frac{4\pi \ell r}{d}$$

Ο ζητούμενος χρόνος θα δίνεται από τη σχέση,

$$t = \sqrt{\frac{2x_{cm}}{a_{cm}}}$$

ή

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{8\pi \ell r}{\mu g d}}}$$

και η ταχύτητα τότε θα είναι,

$$\upsilon_{cm} = a_{cm} t$$

ή

$$\boxed{\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{8\pi \mu g \ell r}{d}}}$$

Σπύρος Χόρτης

schortis@otenet.gr