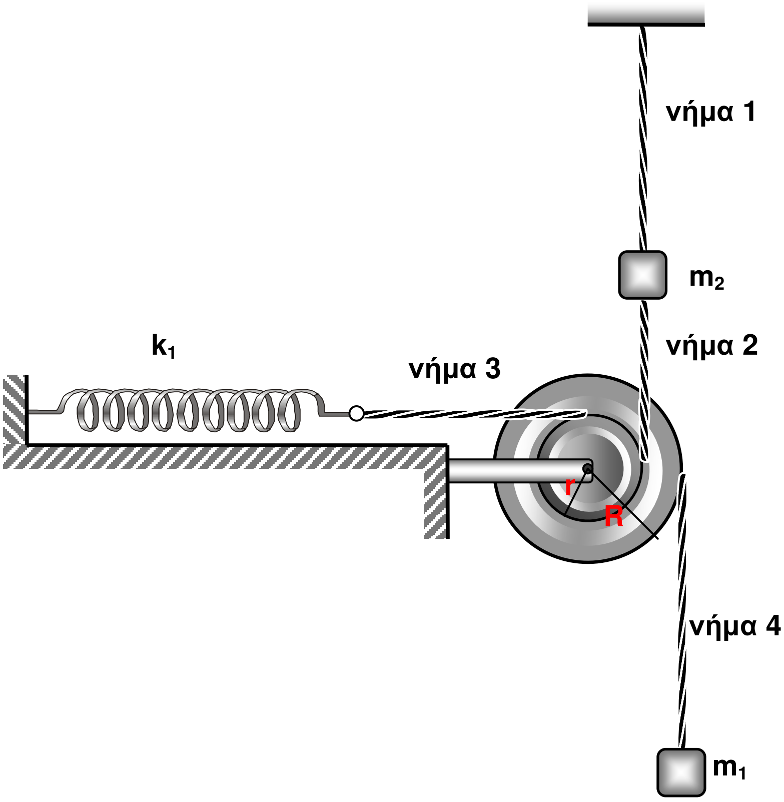
Το 4ο Θέμα του ΟΕΦΕ 2012 λίγο τροποποιημένο…

Στο σχήμα φαίνεται μια διπλή τροχαλία που αποτελείται από δύο ομόκεντρους ομογενείς δίσκους με ακτίνες r = 0,1m και R = 0,2m και μάζες m = 2kg και M=4kg αντίστοιχα. Οι δύο δίσκοι συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να περιστρέφονται ως ένα σώμα, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους.



Στο αυλάκι του μεγάλου δίσκου της τροχαλίας έχουμε τυλίξει αβαρές και μη εκτατό νήμα (4), στο ελεύθερο άκρο του οποίου έχουμε δέσει σώμα μάζας m_1=1kg. Στο αυλάκι του μικρού δίσκου της τροχαλίας έχουμε τυλίξει δύο αβαρή και μη εκτατά νήματα (3) και (2). Στο ελεύθερο άκρο του οριζόντιου νήματος (3) έχουμε δέσει το ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k_1=200 N/m του οποίου το άλλο άκρο είναι δεμένο σε σταθερό σημείο. Στο ελεύθερο άκρο του κατακόρυφου νήματος (2) έχουμε δέσει σώμα μάζας m_2 =0,5kg το οποίο είναι δεμένο και με αβαρές ελαστικό κατακόρυφο νήμα (1) από σταθερό σημείο της οροφής. Το μέτρο F της δύναμης που ασκεί το ελαστικό νήμα (1) είναι ανάλογο της επιμήκυνσής του $\Delta\ell$ σύμφωνα με τη σχέση $F=100\cdot\Delta\ell$ (SI).

Το σύστημα ισορροπεί με το νήμα (1) να είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$ = 0,2m.

Δ1. Να βρείτε την παραμόρφωση του ελατηρίου.

Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα (2). Να υπολογίσετε:

Δ2. Τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος (2).

Δ3. Να αποδείξετε ότι το σώμα μάζας m_1 εκτελεί ΑΑΤ και να βρείτε τη σταθερά της ταλάντωσής του.

Δ4. Να βρείτε πως μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δ5. Τη μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας του συστήματος (τροχαλία – μάζα m_1).

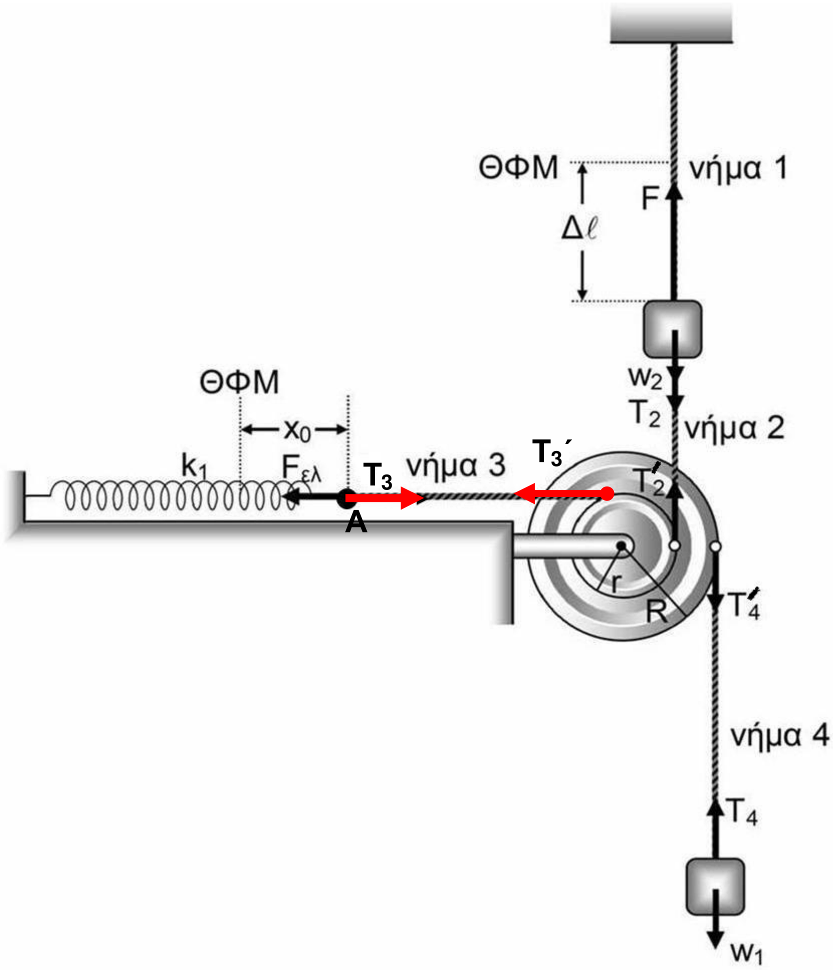
Δ6. Το διάστημα που θα διανύσει το σώμα μάζας m_2 μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του για πρώτη φορά μετά το κόψιμο του νήματος (2).

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας των δίσκων ως προς τον άξονα περιστροφής τους υπολογίζεται από τις σχέσεις $I_1 = \frac{1}{2}mr^2$, $I_2 = \frac{1}{2}MR^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με g = 10 m/s^2 , και τα νήματα δεν ολισθαίνουν στην τροχαλία.

Απάντηση

Δ1.

Από την ισορροπία του κάθε σώματος προκύπτει:



Σ$_1$: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_4 = m_1 g = 10N$ (1)

Επειδή το <u>νήμα 4</u> είναι αβαρές και μη εκτατό τα μέτρα των τάσεων $T_4' = T_4 = 10N$ (2)

Σ$_2$: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 + W_2 = F \Rightarrow$

$T_2 = F - W_2 = 100 \cdot 0{,}2 - 5$

$\Rightarrow T_2 = 15N$ (3)

Επειδή το <u>νήμα 2</u> είναι αβαρές και μη εκτατό τα μέτρα των τάσεων $T'_2 = T_2 = 15N$ (4)

Ελεύθερο άκρο ελατηρίου Α:

Επειδή το σημείο Α στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου που είναι προσδεμένο το νήμα 3 δεν έχει μάζα, θα ισχύει κάθε στιγμή

$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_3 = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$T_3 = k_1 \cdot x_0 = 200 \cdot x_0$

Επειδή το <u>νήμα 3</u> είναι αβαρές και μη εκτατό τα μέτρα των τάσεων είναι ίσα, $T_3' = T_3 = 200 \cdot x_0$ (5)

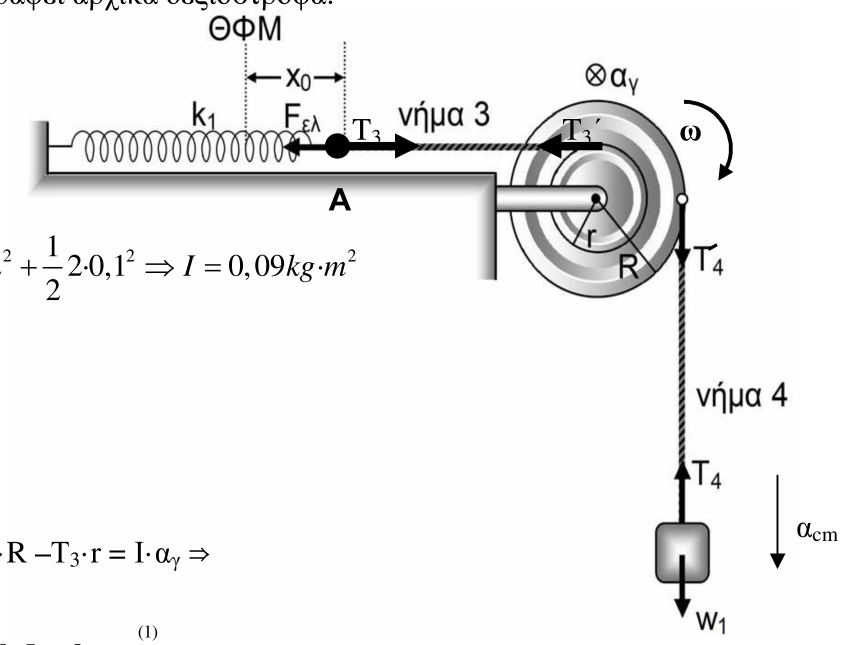
Τροχαλία: $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_4' \cdot R - T'_2 \cdot r - T_3' \cdot r = 0 \underset{(5)}{\overset{(2),(4)}{\Longrightarrow}} 10 \cdot 0{,}2 - 15 \cdot 0{,}1 - 200 \cdot x_0 \cdot 0{,}1 = 0 \Rightarrow$

$0{,}5 = 20x_0 \Rightarrow$ <u>**$x_0 = 0{,}025m$**</u>

Δ2. Αρχικά η τροχαλία ισορροπούσε με τις αριστερόστροφες ροπές των δυνάμεων $T_2΄$ και $T_3΄$ και τη δεξιόστροφη ροπή της $T_4΄$. Τη στιγμή που κόβεται το νήμα 2 χαλάει η ισορροπία του συστήματος. Η τάση $T_2΄$ που ήταν προς τα πάνω και είχε αριστερόστροφη ροπή, πλέον δεν ασκείται. Η αριστερόστροφη ροπή της $T_3΄$ μόλις κόβεται το νήμα είναι ίδια με αυτή που ασκούσε όταν ισορροπούσε γιατί κάθε στιγμή η $T_3 = T_3΄$ και ίση με την δύναμη του ελατηρίου. Τη στιγμή που κόβεται το νήμα το ελατήριο έχει την ίδια επιμήκυνση άρα θα ασκεί ίδια δύναμη και έτσι $T_3΄=5N$. Έτσι είναι λογικό η τροχαλία να στραφεί επιταχυνόμενα δεξιόστροφα και το $Σ_1$ να κινηθεί επιταχυνόμενα προς τα κάτω.

Αλλιώς, εξετάζουμε τις εξωτερικές ροπές του συστήματος τροχαλία -σώμα

Τη στιγμή που κόβεται το νήμα η ροπή του βάρους W_1 είναι μεγαλύτερη από τη ροπή της δύναμης του ελατηρίου $F_{ελ}$ ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο της τροχαλίας και έτσι η τροχαλία θα στραφεί αρχικά δεξιόστροφα.



$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}4{\cdot}0,2^2 + \frac{1}{2}2{\cdot}0,1^2 \Rightarrow I = 0,09 kg{\cdot}m^2$$

$Σ_1$

$ΣF = m_1α_{cm} \Rightarrow m_1{\cdot}g – T_4 = m_1α_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 – T_4 = α_γ{\cdot}R \Rightarrow T_4 = 10 – α_γ{\cdot}0,2$ (1)

Τροχαλία

$Στ = I{\cdot}α_γ \Rightarrow T_4΄{\cdot}R – T_3΄{\cdot}r = I{\cdot}α_γ \Rightarrow T_4{\cdot}R – T_3{\cdot}r = I{\cdot}α_γ \Rightarrow$

$T_4{\cdot}0,2 – F_{ελ}{\cdot}0,1 = 0,09{\cdot}α_γ \Rightarrow 20{\cdot}T_4 – 10{\cdot}5 = 9α_γ \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$20(10 – 0,2{\cdot}α_γ) – 50 = 9{\cdot}α_γ \Rightarrow 150 = 13α_γ \Rightarrow a_γ = \frac{150}{13}\frac{r}{s^2}$

Δ3.

<u>Στη Θ.Ι.</u>

Σώμα m_1

$ΣFy = 0 \Rightarrow w_1 - T_{04} = 0 \Rightarrow T_{04} = w_1$ (1)

Επειδή το <u>νήμα 4</u> είναι αβαρές και μη εκτατό $T'_{04} = T_{04} = w_1$ (2)

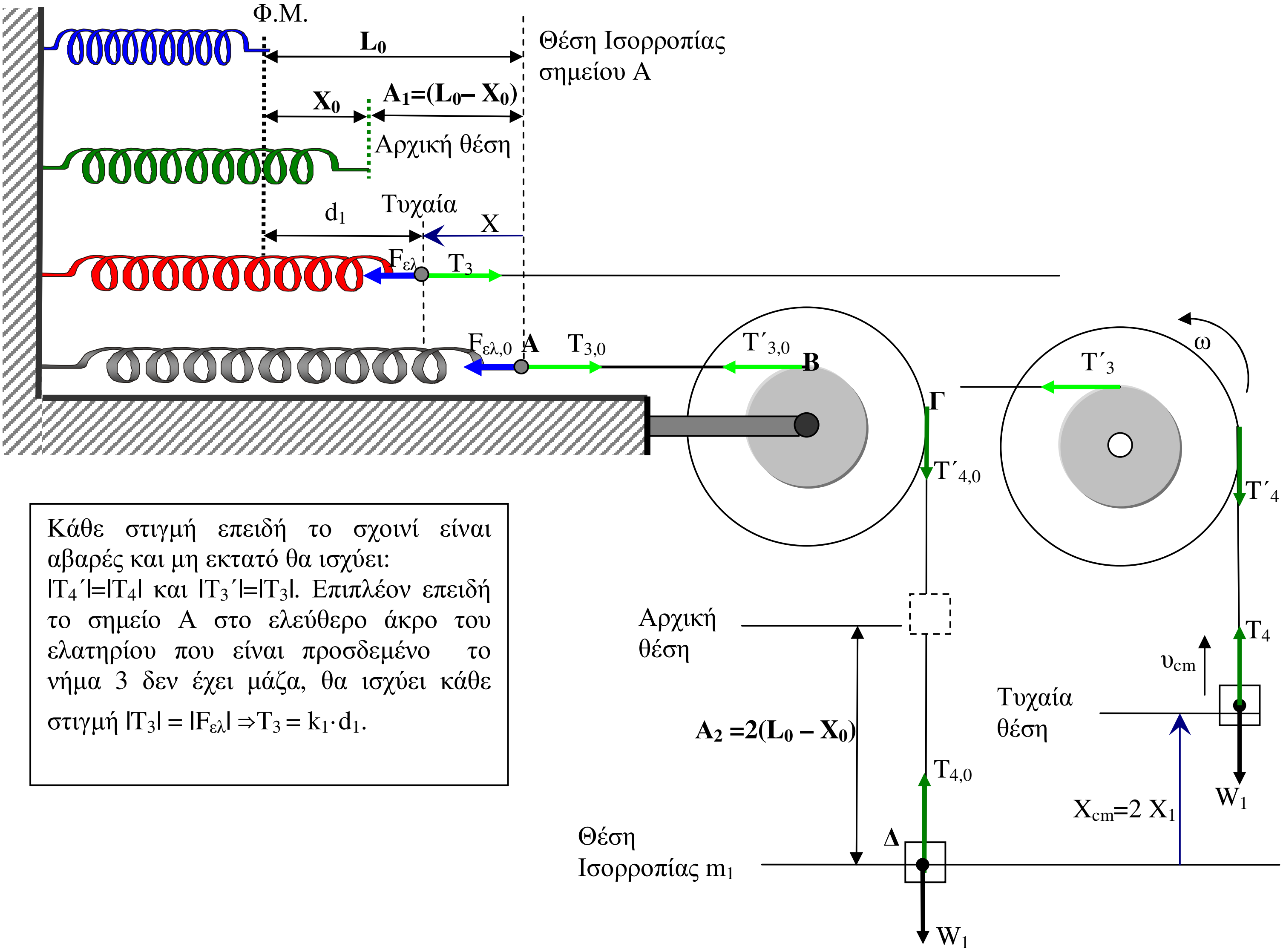
Τροχαλία:

$Στ = 0 \Rightarrow T'_{04}R - T'_{03}r = 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} T'_{03}r = w_1R$ (3)

Επειδή το <u>νήμα 3</u> είναι αβαρές και μη εκτατό $T'_{03} = T_{03}$ και επειδή το σημείο Α στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου που είναι προσδεμένο το νήμα 3 δεν έχει μάζα, θα ισχύει κάθε στιγμή $T_3 = F_{ελ} \Rightarrow$ στη Θ.Ι. $T_{3,0} = F_{ελ,0} = k_1 \cdot L_0$ (4)

$$(3) \xRightarrow{(4)} k_1 \cdot L_0 \cdot r = w_1 R \quad (5)$$

Έστω το σώμα σε μία τυχαία θέση από τη Θ.Ι. που κινείται προς τα επάνω και η τροχαλία περιστρέφεται αριστερόστροφα. Δουλεύουμε αλγεβρικά δηλ. παίρνουμε θετική φορά για τις δυνάμεις τη φορά της ταχύτητας και για τις ροπές τη φορά της γωνιακής ταχύτητας.



Κάθε στιγμή επειδή το σχοινί είναι αβαρές και μη εκτατό θα ισχύει: $|T_4'|=|T_4|$ και $|T_3'|=|T_3|$. Επιπλέον επειδή το σημείο Α στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου που είναι προσδεμένο το νήμα 3 δεν έχει μάζα, θα ισχύει κάθε στιγμή $|T_3| = |F_{ελ}| \Rightarrow T_3 = k_1 \cdot d_1$.

Επειδή τα σχοινιά είναι μη εκτατά όλα τα σημεία του κάθε σχοινιού θα έχουν ίδια ταχύτητα και ίδια επιτάχυνση.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Στο νήμα } 3: \upsilon_\mathrm{A} = \upsilon_\mathrm{B} \Rightarrow \upsilon_\mathrm{A} = \omega \cdot r \Rightarrow \dfrac{d\upsilon_\mathrm{A}}{dt} = \dfrac{d(\omega \cdot r)}{dt} \Rightarrow a_A = a_\gamma r \\[2em] \text{Στο νήμα } 4: \upsilon_\Delta = \upsilon_\Gamma \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow \dfrac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \dfrac{d(\omega \cdot R)}{dt} \Rightarrow a_{cm} = a_\gamma R\end{array}\right\} \Rightarrow a_{cm} = 2a_A$$

Επίσης προκύπτει ότι $X_{cm}=2X_1$

Στη θέση ισορροπίας έχουμε:

Σώμα 1: $\Sigma F = 0 \Rightarrow w_1 - T_{04} \Rightarrow T_{04} = w_1$ (1)

Τροχαλία :

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T'_{03} r - T'_{04} R = 0 \Rightarrow T_{03} r - T_{04} R = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} T_{03} r - w_1 R = 0 \Rightarrow T_{03} r = w_1 R \quad (2)$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,0} \cdot r = w_1 R \Rightarrow k_1 L_0 r = w_1 R \quad (3)$$

$$L_0 = 0{,}1 m$$

Στην τυχαία θέση:

Σώμα 1:

$$\Sigma F = m_1 a_{cm} \Rightarrow T_4 - w_1 = m_1 a_{cm} \Rightarrow T_4 R - w_1 R = m_1 a_{cm} R \Rightarrow$$

$$T_4 R - w_1 R = m_1 a_\gamma R^2 \quad (4)$$

Τροχαλία :

$$\Sigma \tau = \mathrm{I}\alpha_\gamma \Rightarrow T_3 r - T_4 R = \mathrm{I}\alpha_\gamma \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} \cdot r - T_4 R = \mathrm{I}\alpha_\gamma \Rightarrow k(L_0 - X_1) r - T_4 R = \mathrm{I}\alpha_\gamma$$

$$\Rightarrow kL_0 r - kX_1 r - T_4 R = \mathrm{I}\alpha_\gamma \overset{(3)}{\Longrightarrow} w_1 R - kX_1 r - T_4 R = \mathrm{I}\alpha_\gamma \quad (5) \qquad \left(\left|F_{\varepsilon\lambda}\right| = k_1 d_1 = k_1 (L_0 - X_1)\right)$$

$$(4) + (5) \Rightarrow w_1 R - kX_1 r - T_4 R + T_4 R - w_1 R = \mathrm{I}\alpha_\gamma + m_1 R^2 a_\gamma \quad \Rightarrow$$

$$-kX_1 r = (\mathrm{I} + m_1 R^2) a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = -\frac{kX_1 r}{\mathrm{I} + m_1 R^2} \quad (6)$$

Και επειδή $X_{cm}=2X_1 \Rightarrow a_\gamma = \dfrac{-kr}{2(\mathrm{I} + m_1 R^2)} X_{cm} = -\dfrac{1000}{13} X_{cm}$

Από το θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής για το m_1 έχουμε

$$\Sigma F = m_1 a_{cm} \Rightarrow \Sigma F = m_1 a_\gamma R \overset{(6)}{\Longrightarrow} \Sigma F = -\frac{m_1 krR}{2(\mathrm{I} + m_1 R^2)} X_{cm} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -\frac{1 \cdot 200 \cdot 0,1 \cdot 0,2}{2(0,09 + 1 \cdot 0,2^2)} X_{cm} \Rightarrow \Sigma F = -\frac{4}{2(0.13)} X_{cm} \Rightarrow \Sigma F = -\frac{200}{13} X_{cm}$$

Άρα είναι της μορφής -Dx με D = 200/13 N/m
Η μέγιστη απομάκρυνση του σημείου Α από την αρχική του θέση μέχρι τη ΘΙ ισορροπίας του είναι $(L_0 – x_0) = (0,1–0,025) = 0,075$m. Θα προσδιορίσουμε το πλάτος του m_1 ως εξής: Κάθε στιγμή $X_{cm}=2X_1$ έτσι η μέγιστη απομάκρυνση του m_1 από την αρχική του θέση που είναι ακραία μέχρι τη θέση ισορροπίας του θα είναι $A_2 = 2 \cdot 0,075 = 0,15$m

Επαλήθευση: η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του m_1 είναι $\alpha_\gamma = \frac{1000}{13} 0,15 = \frac{150}{13} r/s^2$

Το Ω της ταλάντωσης του m_1 είναι $\Omega = \sqrt{\frac{D}{m_1}} = \sqrt{\frac{\frac{200}{13}}{1}} = \sqrt{\frac{200}{13}} = 10\sqrt{\frac{2}{13}} r/s$

Θεωρώντας θετική την αρχική απομάκρυνση του m_1 έχουμε

$X_{cm} = A\eta\mu(\Omega t + \varphi_0) = 0,15\eta\mu(10\sqrt{\frac{2}{13}}\, t + \pi/2)$ S.I.

$u_{cm} = \Omega A\sigma\upsilon\nu(\Omega t + \varphi_0) = 1,5\sqrt{\frac{2}{13}}\, \sigma\upsilon\nu(10\sqrt{\frac{2}{13}}\, t + \pi/2)$ S.I.

Το διάστημα που θα διανύσει το σώμα μάζας m_1 μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του για πρώτη φορά μετά το κόψιμο του νήματος (2) θα είναι 0,3m διότι ξεκινάει από ακραία θέση και στην άλλη ακραία θέση θα σταματήσει στιγμιαία. Το διάστημα θα ισούται με $X_{cm}=2A=0.3$m

Δ4.

Επειδή κάθε στιγμή ισχύει $u_{cm} = \omega R \Rightarrow \omega = 7,5\sqrt{\frac{2}{13}}\, \sigma\upsilon\nu(10\sqrt{\frac{2}{13}}\, t + \pi/2)$ S.I.

Δ5.

$$K_{\max,\tau\rho o\chi} = \frac{1}{2} \mathrm{I} \cdot \omega_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,09 \cdot \left(7,5\sqrt{\frac{2}{13}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,09 \cdot 56,25 \cdot \frac{2}{13} = \frac{5,0625}{13} J$$

$$K_{\max,m_1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot u_{\max}^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot \left(1,5\sqrt{\frac{2}{13}}\right)^2 = \frac{2,25}{13} J$$

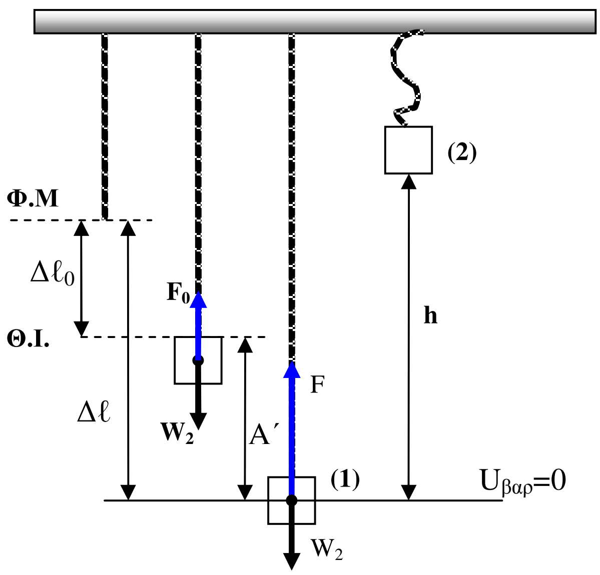
$K_{\max,\ \tau\rho\text{-}m1}$ $= K_{\max,\tau\rho o\chi} + K_{\max,m_1} = \frac{5,0625}{13} J + \frac{2,25}{13} J = \frac{7,3125}{13} J = 0,5625J$

Δ6.

Το σώμα Σ_2 θα εκτελέσει ΑΑΤ μετά το κόψιμο του νήματος με D=100N/m. Από τη Θ.Ι.

$\Sigma F=0 \Rightarrow F_0 - w_2 = 0 \Rightarrow 100 \cdot \Delta\ell_0 = m_2 g \Rightarrow$

$\Delta\ell_0 = 0,05$m. Το σώμα ξεκινά από ακραία θέση ταλάντωση με πλάτος $A΄= \Delta\ell - \Delta\ell_0 = 0,2 - 0,005 = 0,15$m. Αυτό σημαίνει ότι θα φτάσει πάνω από το Φ.Μ. και θα λυγίσει το σχοινί. Από τη στιγμή αυτή και μετά θα κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω έως ότου σταματήσει στιγμιαία. Μετά θα κινηθεί προς τα κάτω με ελεύθερη πτώση και μόλις φτάσει στο Φ.Μ. θα κάνει ΑΑΤ με πλάτος Α΄=0,15m και D=100N/m



Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από τη θέση (1) που κόβεται το νήμα έως τη θέση (2) που σταματά στιγμιαία.
Το ελαστικό νήμα συμπεριφέρεται όσο είναι τεντωμένο σαν ελατήριο. Από τη στιγμή που περάσει πάνω από το Φ.Μ. και μετά δεν ασκεί δύναμη και δεν παράγει έργο.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_2} + W_{F_{\varepsilon\lambda}} \Rightarrow$$

$$0 - 0 = (U_{\beta\alpha\rho,\alpha\rho\chi} - U_{\beta\alpha\rho,\tau\varepsilon\lambda}) + (U_{\varepsilon\lambda,\alpha\rho\chi} - U_{\varepsilon\lambda,\tau\varepsilon\lambda}) \Rightarrow$$

$$0 = 0 - m_2 g h + \frac{1}{2} k \Delta\ell^2 - 0 \Rightarrow$$

$$m_2 g h = \frac{1}{2} k \Delta\ell^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}\frac{k\Delta\ell^2}{m_2 g} \Rightarrow h = \frac{1}{2}\frac{100 \cdot 0,2^2}{0,5 \cdot 10} \Rightarrow h = 0,4m$$

Σχόλια

1. Στο ερώτημα Δ3 η πορεία που ακολουθούμε για την απόδειξη της ταλάντωσης είναι να τοποθετήσουμε το σώμα σε μία τυχαία θέση την οποία θεωρούμε θετική και το σώμα να κινείται και να στρέφεται προς τα θετικά. Θετική φορά για τις ροπές παίρνουμε τη φορά της γωνιακής ταχύτητας και για τις δυνάμεις τη φορά της ταχύτητας του κέντρου μάζας. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να σχεδιάσουμε αυθαίρετα τις δυνάμεις. Από τη λύση των εξισώσεων βγάζουμε μία σχέση για την επιτάχυνση της μορφής $\alpha_{cm} = -\lambda x$ και από τη σχέση $\Sigma F = m\alpha_{cm}$ αποδεικνύουμε ότι είναι της μορφής $-Dx$ και ότι κάνει ΑΑΤ. Θα μπορούσαμε να πάρουμε θετική φορά αυτή της επιτάχυνσης αλλά θα έπρεπε να ξέρουμε αν το σώμα επιβραδύνεται ή όχι στη θέση αυτή και να είχαμε σωστά τις φορές των δυνάμεων ειδικά αν στροφικό ρόλο είχε μόνο μία δύναμη.

2. Στο ερώτημα Δ4

$$\Sigma\tau = \mathrm{I}\alpha_\gamma \overset{(6)}{=} \mathrm{I}\frac{-kr}{2(\mathrm{I}+m_1R^2)}X_{cm} \xrightarrow{\mathrm{X_{cm}=R\cdot\theta}} -\frac{I\cdot k\cdot r}{2(\mathrm{I}+m_1R^2)}R\cdot\theta \Rightarrow \Sigma\tau = -\frac{I\cdot k\cdot r\cdot R}{2(\mathrm{I}+m_1R^2)}\theta \Rightarrow \Sigma\tau = -\frac{18}{13}\theta$$

η οποία είναι της μορφής $\Sigma\tau = -\tilde{D}\cdot\theta$ που σημαίνει ότι η τροχαλία εκτελεί στροφική ταλάντωση με $\tilde{D} = \frac{18}{13}N\cdot m$.

Η στροφική ταλάντωση είναι η στροφική κίνηση ενός στερεού σώματος κατά την οποία μεταβάλλεται η φορά περιστροφής του και εκδηλώνεται περιοδικότητα. Κατά την εξέλιξη της κίνησης εκδηλώνεται ροπή επαναφοράς.

Από τη σχέση $\mathrm{X_{cm} = R\cdot\theta}$ προκύπτει:

$$\mathrm{X_{cm}} = \mathrm{R}\cdot\theta \Rightarrow \theta = \frac{\mathrm{X_{cm}}}{R} = \frac{0,15\eta\mu\left(10\sqrt{\frac{2}{13}}t+\frac{\pi}{2}\right)}{0,2} \Rightarrow \theta = 0,75\eta\mu\left(10\sqrt{\frac{2}{13}}t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

για τη γωνιακή θέση ισχύει $\theta = \theta_0\eta\mu(\Omega' t+\varphi_0)$, όπου το θ_0 είναι η μέγιστη γωνία στροφής, (κατ' αντιστοιχία με τις μηχανικές θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι το πλάτος της γωνιακής μετατόπισης) και το $\Omega'=\Omega$ είναι η κυκλική συχνότητα της στροφικής ταλάντωσης και δεν έχει σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα ω.

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = \sqrt{\dfrac{D}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{200}{13}} \\[2ex] \Omega' = \sqrt{\dfrac{\tilde{D}}{I}} = \sqrt{\dfrac{18}{13\cdot 0,09}} = \sqrt{\dfrac{200}{13}}\end{array}\right\} \Rightarrow \Omega = \Omega'$$

Επιπλέον αν συγκρίνουμε με τη γωνιακή ταχύτητα ισχύει:

η γωνιακή θέση $\rightarrow$ $\theta = \theta_0\eta\mu(\Omega t + \varphi_0) \Rightarrow \theta = 0,75\eta\mu\left(10\sqrt{\frac{2}{13}}t+\frac{\pi}{2}\right)$

η γωνιακή ταχύτητα $\rightarrow$ $\omega = d\theta/dt = \Omega\cdot\theta_0\sigma\upsilon\nu(\Omega t + \varphi_0) \Rightarrow \omega = 7,5\sqrt{\frac{2}{13}}\sigma\upsilon\nu\left(10\sqrt{\frac{10}{13}}t+\frac{\pi}{2}\right)$

η γωνιακή επιτάχυνση $\rightarrow$ $\alpha_\gamma = d^2\theta/dt^2 = -\,\Omega^2\theta_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -\Omega^2\theta$

η ροπή επαναφοράς $\rightarrow$ $\Sigma\tau = -I\Omega^2\theta$, $\tilde{D} = I\Omega^2$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{\tilde{D}}}$

Χ.Αγριόδημας