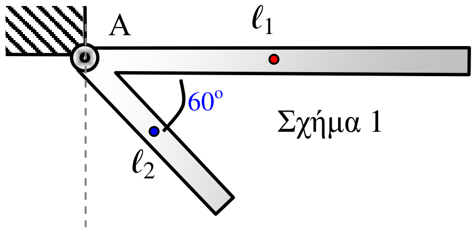
Εσωτερικές Αλληλεπιδράσεις Νο 3.

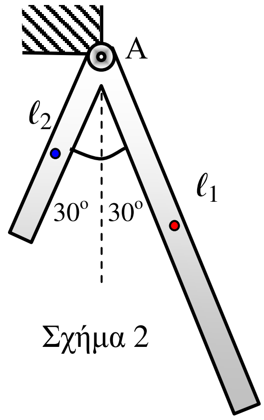
<u>Το θέμα του 2015, (επαναληπτικές)</u>



Σχήμα 1

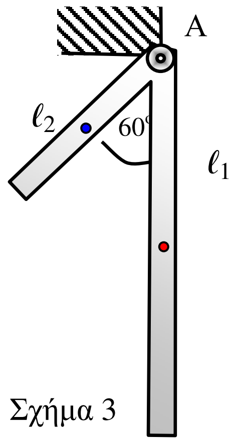
Δύο ράβδοι είναι συνδεδεμένες στο άκρο τους Α και σχηματίζουν σταθερή γωνία 60^o μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Οι ράβδοι είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αλλά κάθε μία είναι ομογενής. Το σύστημα των δύο ράβδων μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άρθρωση, που είναι στερεωμένη σε τοίχο, στο άκρο Α, χωρίς τριβές. Το σύστημα αφήνεται να περιστραφεί υπό την επίδραση της βαρύτητας από τη θέση του Σχήματος 1, όπου η ράβδος ℓ_1 είναι οριζόντια, με αρχική ταχύτητα μηδέν.

Δίνεται ότι τα μήκη των δύο ράβδων είναι ℓ_1=4m και ℓ_2=2m, ενώ η μάζα της ράβδου ℓ_2 είναι m_2=10kg.



Σχήμα 2

A1. Να υπολογίσετε τη μάζα m_1 της ράβδου μήκους ℓ_1, εάν το σύστημα αποκτά τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική στιγμή που οι δύο ράβδοι σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.
A2. Βρείτε τη ροπή που ασκεί η μία ράβδος στην άλλη στην θέση του σχήματος 2.
A3. Επιβεβαιώστε ή όχι την ακόλουθη πρόταση.
"Το κέντρο μάζας βρίσκεται στην διχοτόμο της γωνίας των δύο ράβδων."
A4. Βρείτε την συνιστώσα της δύναμης του άξονα στην οριζόντια διεύθυνση που ασκείται στο σύστημα των δύο ράβδων στη θέση του σχήματος 2.



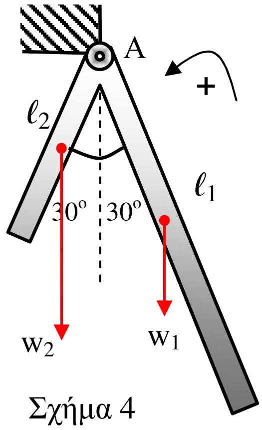
Σχήμα 3

B1. Να υπολογίσετε τη μάζα m_1 της ράβδου μήκους ℓ_1, εάν το σύστημα σταματά στιγμιαία, όταν η ράβδος μήκους ℓ_1 φτάνει στην κατακόρυφη θέση που φαίνεται στο Σχήμα 3.
B2. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου μήκους ℓ_2 ως προς τον άξονα περιστροφής, στη θέση που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.
B3. Να βρείτε την ροπή που ασκεί η κάθε ράβδος στην άλλη του ερωτήματος Β1.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2, η ροπή αδρανείας ράβδου μήκους ℓ και μάζας m που περιστρέφεται γύρω από το άκρο της Α, $I_A = \frac{1}{3}m\ell^2$ και ότι $\sqrt{3}$ =1,7 (προσεγγιστικά).

Απάντηση

A1.)



Σχήμα 4

Οι ροπές των βαρών των δύο ράβδων προκαλούν την περιστροφή περί το Α. Αφού στη δοσμένη θέση επιτυγχάνεται η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα σημαίνει ότι στο σημείο αυτό η συνολική ροπή μηδενίζεται και αμέσως μετά αντιστρέφει πρόσημο (επιβραδύνεται). Άρα στη θέση αυτή θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi,\Sigma\upsilon\sigma}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\tau}_{\vec{w}_2}+\vec{\tau}_{\vec{w}_1}=\vec{0}\overset{(+)\odot}{\Rightarrow} m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 30^\circ - m_1 g\frac{\ell_1}{2}\eta\mu 30^\circ=0\rightarrow$$

$$m_2\ell_2=m_1\ell_1\rightarrow\boxed{m_1=m_2\frac{\ell_2}{\ell_1}=5\ kg}$$

A2.)

Η κάθε ράβδος έχει κάθε στιγμή ίδια γωνιακή επιτάχυνση και γωνιακή ταχύτητα με αυτή του συστήματος των δύο ράβδων. Συνεπώς στη θέση αυτή για το κάθε σώμα η συνολική ροπή του θα είναι μηδέν περί άξονα που διέρχεται από το σημείο Α. Η ροπή από τη δύναμη του άξονα είναι μηδέν δεδομένου ότι ο άξονας διέρχεται από το άκρο της κάθε ράβδου.

$$\Sigma\vec{\tau}_{\rho 1}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\tau}_{\vec{w}_1}+\vec{\tau}_1=\vec{0}\overset{(+)\odot}{\Rightarrow}-m_1 g\frac{\ell_1}{2}\eta\mu 30^\circ+\tau_1=0\rightarrow\tau_1=5\cdot 10\frac{4}{2}\frac{1}{2}\rightarrow\boxed{\tau_1=50\mathrm{N\cdot m}}$$

Με βάση τη φορά που επιλέξαμε η φορά της τ_1 είναι αριστερόστροφη. Αναμένουμε η ροπή τ_2 που δέχεται η ράβδος 2 από την 1 να είναι αντίθετη της τ_1 λόγω δράσης – αντίδρασης δηλ. δεξιόστροφη με μέτρο 50N·m.

$$\Sigma\vec{\tau}_{\rho 2}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\tau}_{\vec{w}_2}+\vec{\tau}_2=\vec{0}\overset{(+)\odot}{\Rightarrow} m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 30^\circ+\tau_2=0\rightarrow\tau_2=-10\cdot 10\frac{2}{2}\frac{1}{2}\rightarrow\boxed{\tau_2=-50\mathrm{N\cdot m}}$$

A3.)

Η πρόταση είναι ορθή.
Στη θέση που το σύστημα αποκτά μέγιστη γωνιακή ταχύτητα η γωνιακή επιτάχυνση είναι μηδέν. Έτσι οι εξωτερικές ροπές του συστήματος ως προς το Α θα είναι μηδέν. Υποθέτουμε ότι το βάρος των δύο ράβδων διέρχεται από μία θέση Μ. Η δύναμη του άξονα περί το Α δεν προκαλεί ροπή. Η μοναδική εξωτερική ροπή του συστήματος ως προς το Α είναι αυτή του βάρους των δύο ράβδων, όπου στη θέση που μεγιστοποιείται η γωνιακή ταχύτητα προκύπτει $\tau_w=0\rightarrow d\cdot w=0\rightarrow d=0$. Αυτό σημαίνει ότι το βάρος του συστήματος έχει φορέα την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο Α και εφόσον αυτό επιτυγχάνεται σε θέση που οι ράβδοι σχηματίζουν ίση γωνία με την κατακόρυφο το βάρος θα διέρχεται από τη διχοτόμο της γωνίας των δύο ράβδων. Επειδή το πεδίο είναι ομογενές η θέση του κέντρου βάρους είναι ίδια με τη θέση του κέντρου μάζας.

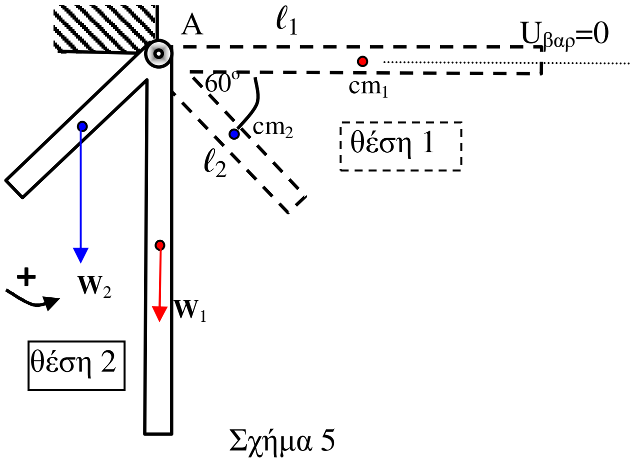
A4.)

Στηριζόμενοι στο προηγούμενο ερώτημα ο φορέας του βάρους βρίσκεται στην κατακόρυφο που περνά από το Α και δεν προβάλλει οριζόντια συνιστώσα. Έτσι για την κίνηση του κέντρου μάζας του συστήματος

$$\Sigma\vec{F}^{\varepsilon\xi.}_{\varepsilon\pi,\Sigma\upsilon\sigma}=\mathrm{M}\cdot\vec{\alpha}_\varepsilon\Rightarrow\vec{F}_{\alpha\xi,x}=M\cdot\cancel{\alpha_\gamma}\cdot AM\Rightarrow F_{\alpha\xi,x}=0$$

Β1.)

Από ΑΔΜΕ έχουμε:



Σχήμα 5

$$E_{MHX,(1)} = E_{MHX,(2)} \Rightarrow$$

$$K_{1,\Sigma} + U^{(1)}_{B,\rho 1} + U_{B,\rho 1} = K_{2,\Sigma} + U^{(2)}_{B,\rho 1} + U^{(2)}_{B,\rho 2} \Rightarrow$$

$$0 + 0 - m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 60^o = 0 - m_2 g\frac{\ell_2}{2}\sigma\upsilon\nu 60^o - m_1 g\frac{\ell_1}{2} \Rightarrow$$

$$-m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 60^o + m_2 g\frac{\ell_2}{2}\sigma\upsilon\nu 60^o = -m_1 g\frac{\ell_1}{2} \Rightarrow$$

$$-m_2\ell_2\eta\mu 60^o + m_2\ell_2\sigma\upsilon\nu 60^o = -m_1\ell_1 \Rightarrow$$

$$-10\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 10\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = -m_1\cdot 4 \Rightarrow$$

$$-17 + 10 = -4m_1 \Rightarrow m_1 = 1,75kg$$

Β2.)

Στο σύστημα ενεργούν μόνο οι εξωτερικές ροπές. Περί το σημείο Α η μόνη εξωτερική ροπή που ενεργεί είναι αυτή του βάρους της ράβδου 2. Με θετική φορά την αριστερόστροφη για τις ροπές παίρνουμε

$$\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi,(A)} = I_A\vec{a}_\gamma \overset{(+)\odot}{\Rightarrow} m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 60^\circ = (I_1 + I_2)\alpha_\gamma \Rightarrow m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 60^\circ = \left(\frac{1}{3}m_1\ell_1^2 + \frac{1}{3}m_2\ell_2^2\right)\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$\alpha_\gamma = \frac{m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 60^\circ}{\frac{1}{3}(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{10\cdot 10\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{3}(1,75\cdot 4^2 + 10\cdot 2^2)} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{50\sqrt{3}}{\frac{1}{3}(28+40)} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{150\sqrt{3}}{68} \Rightarrow$$

$$\alpha_\gamma = \frac{150\cdot 1,7}{68} = \frac{255}{68} \Rightarrow \alpha_\gamma = 3,75\ \frac{rad}{s^2}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου περί άξονα που διέρχεται από το Α θα ισούται με

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = I_2\vec{a}_\gamma \overset{(+)\odot}{\Rightarrow} \frac{dL_2}{dt} = \frac{1}{3}m_2\ell_2^2 a_\gamma = \frac{1}{3}10\cdot 2^2\cdot 3,75 \Rightarrow \frac{dL_2}{dt} = 50\ kg\frac{m^2}{s^2}$$

Β3.)

Η εσωτερική ροπή που δέχεται η ράβδος 2 από την 1 θα ισούται με

$$\Sigma\vec{\tau}_{\rho 2} = I_{\rho 2}\vec{a}_\gamma \Rightarrow \vec{\tau}_{\vec{w}_2} + \vec{\tau}_2 = I_{\rho 2}\vec{a}_\gamma \overset{(+)\odot}{\Rightarrow} m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 60^o + \tau_2 = \frac{1}{3}m_2\ell_2^2\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$\tau_2 = \frac{1}{3}10\cdot 2^2 3,75 - 10\cdot 10\cdot\frac{2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tau_2 \overset{\sqrt{3}=1.7}{\Rightarrow} 50 - 85 \Rightarrow \tau_2 = -35Nm$$

Αναμένουμε η ροπή που ασκείται στην ράβδο 1 από τη 2 να έχει μέτρο 35N·m και φορά αριστερόστροφη.

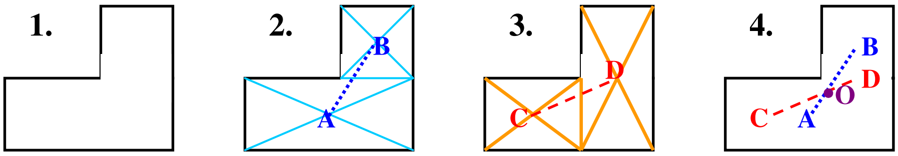
Η εσωτερική ροπή που δέχεται η ράβδος 1από την 2 θα ισούται με

$$\Sigma\vec{\tau}_{\rho 1} = I_{\rho 2}\vec{a}_\gamma \Rightarrow \vec{\tau}_{\vec{w}_1} + \vec{\tau}_1 = I_{\rho 2}\vec{a}_\gamma \overset{(+)\odot}{\Rightarrow} 0 + \tau_1 = \frac{1}{3}m_1\ell_1^2\alpha_\gamma \Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{3}1,75\cdot 4^2 3,75 \Rightarrow \tau_1 = 35Nm$$

Σχόλια για καθηγητές:

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να υπολογίσουμε τη θέση του κέντρου μάζας σε ένα σύστημα σωμάτων.

Μια μέθοδος για να προσδιορίσουμε το κέντρο μάζας ενός σώματος σχήματος L είναι η ακόλουθη.



Σχήμα 6

Γνωρίζοντας ότι το κέντρο μάζας ενός συστήματος δύο σωμάτων κείται στο φορέα που ενώνει τα κέντρα μάζας κάθε σώματος κάνουμε το εξής:

i. Χωρίζουμε το σώμα σε δύο ορθογώνια, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Βρίσκουμε τα κέντρα μάζας αυτών των δύο ορθογωνίων σχεδιάζοντας τις διαγωνίους τους. Σχεδιάζουμε μια γραμμή που ενώνει τα κέντρα μάζας. Το κέντρο μάζας πρέπει να βρίσκεται πάνω στην ευθεία AB.

ii. Χωρίζουμε το σώμα σε άλλα δύο ορθογώνια, όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Βρίσκουμε τα κέντρα μάζας αυτών των ορθογωνίων σχεδιάζοντας τις διαγωνίους. Σχεδιάζουμε μια γραμμή που ενώνει τα κέντρα μάζας. Το κέντρο μάζας του σχήματος πρέπει επίσης να βρίσκεται στην ευθεία CD.

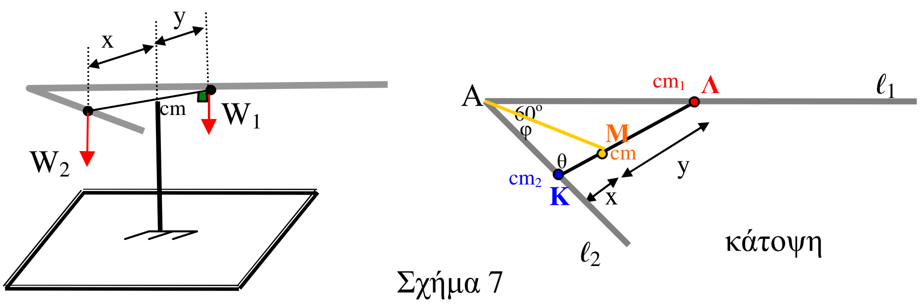
iii. Καθώς το κέντρο μάζας του σχήματος πρέπει να βρίσκεται τόσο στην ευθεία AB όσο και στην ευθεία CD, είναι προφανές ότι θα βρίσκεται στην τομή αυτών των δύο ευθειών, στο O. Το σημείο O μπορεί να *μην* βρίσκεται μέσα στο σχήμα.

Εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε τη θέση του κέντρου μάζας των δύο στερεών γνωρίζοντας ότι το κέντρο μάζας ενός συστήματος δύο σωμάτων κείται στο φορέα που ενώνει τα κέντρα μάζας των σωμάτων. Επιπλέον επειδή το πεδίο είναι ομογενές η θέση του κέντρου βάρους είναι ίδια με τη θέση του κέντρου μάζας. Επικαλούμενοι το θεώρημα των ροπών η ροπή των βαρών των δύο ράβδων ως προς οποιοδήποτε σημείο θα είναι ίση με τη ροπή της συνισταμένης τους ως προς το ίδιο σημείο. Έτσι ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος η ροπή των βαρών θα είναι μηδέν αφού το βάρος διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος των σωμάτων. Το κέντρο μάζας είναι πιο κοντά στο σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα.

Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΚΛ

$$\text{ΚΛ} = \sqrt{\text{ΑΚ}^2 + \text{ΑΛ}^2 - 2\cdot\text{ΑΚ}\cdot\text{ΑΛ}\cdot\sigma\upsilon\nu 60^o} \Rightarrow \text{ΚΛ} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{ΚΛ} = \sqrt{1+4-2} \Rightarrow$$

$$\text{ΚΛ} = \sqrt{3}m \quad (1)$$



Σχήμα 7

Για την περίπτωση του Α ερωτήματος έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau}_{(cm)}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\tau}_{w2}=-\vec{\tau}_{w1}\overset{(+)\otimes}{\Rightarrow}x\cdot m_2 g=y m_1 g\Rightarrow x=\frac{m_1}{m_2}y\Rightarrow x=\frac{y}{2}\quad(2)$$

x+y=√3⇒3x=√3⇒x=√3/3 (3)

Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΚΛ

$$\mathrm{A\Lambda}=\sqrt{\mathrm{AK}^2+\mathrm{K\Lambda}^2-2\cdot\mathrm{AK}\cdot\mathrm{K\Lambda}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow 2=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2-2\cdot1\cdot\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow 2=\sqrt{4-2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow$$
$$4=4--2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=0\Rightarrow\theta=90^o$$

Άρα το τρίγωνο ΑΚΜ είναι ορθογώνιο και η υποτείνουσα ΑΜ ισούται με:

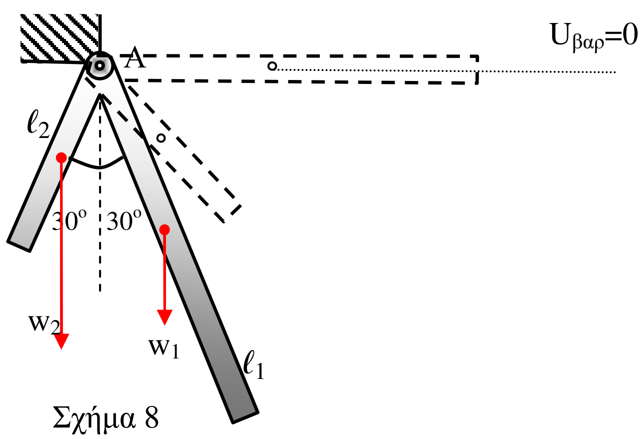
$$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{KM}^2+\mathrm{AK}^2}\Rightarrow\mathrm{AM}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\Rightarrow\mathrm{AM}=\sqrt{1+\frac{3}{9}}\Rightarrow\mathrm{AM}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}m$$

και συνφ=ΑΚ/ΑΜ=√3/2⇒φ=30°. Δηλ. το κέντρο μάζας επιβεβαιώσαμε ότι βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας των δύο ράβδων.

Επιπλέον τώρα που βρήκαμε και την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του κέντρου μάζας μπορούμε να βρούμε την ολική δύναμη από τον άξονα στην κατακόρυφη θέση.

Από ΑΔΜΕ έχουμε:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{MHX},(1)}=\mathrm{E}_{\mathrm{MHX},(2)}\Rightarrow$$
$$\mathrm{K}_{1,\Sigma}+U^{(1)}_{\mathrm{B},\rho1}+U_{\mathrm{B},\rho1}=\mathrm{K}_{2,\Sigma}+U^{(2)}_{\mathrm{B},\rho1}+U^{(2)}_{\mathrm{B},\rho2}\Rightarrow$$



Σχήμα 8

$$0+0-m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 60^o = 0-m_2 g\frac{\ell_2}{2}\sigma\upsilon\nu 30^o - m_1 g\frac{\ell_1}{2}\sigma\upsilon\nu 30^o + \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\mathrm{A}}\omega^2 \Rightarrow$$

$$-m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 60^o + m_2 g\frac{\ell_2}{2}\sigma\upsilon\nu 30^o + m_1 g\frac{\ell_1}{2}\sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\mathrm{A}}\omega^2 \Rightarrow$$

$$-10\cdot 10\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 10\cdot 10\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 5\cdot 10\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}m_1\ell_1^2 + \frac{1}{3}m_2\ell_2^2\right)\omega^2 \Rightarrow$$

$$50\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}5\cdot 4^2 + \frac{1}{3}10\cdot 2^2\right)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}r^2/s^2$$

Έτσι

$$\Sigma\vec{F}^{\varepsilon\xi.}_{\varepsilon\pi,\Sigma\upsilon\sigma} = \mathrm{M}\cdot\vec{\alpha}_{\varepsilon} \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\xi,x} = M\cdot\cancel{\vec{\alpha}_{\gamma}}\cdot AM \Rightarrow F_{\alpha\xi,x} = 0$$

Και

$$\Sigma\vec{F}_{\kappa} = m_{o\lambda}\cdot\vec{\alpha}_{\kappa} \Rightarrow F_{\alpha\xi} - w_{o\lambda} = m_{o\lambda}\cdot\omega^2\cdot\mathrm{AM} \Rightarrow$$

$$F_{\alpha\xi} = m_{o\lambda}\cdot\omega^2\cdot\mathrm{AM} + w_{o\lambda} = 15\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} + 15\cdot 10 \Rightarrow$$

$$F_{\alpha\xi} = 75 + 150 \Rightarrow F_{\alpha\xi} = 225\mathrm{N}$$

Προσοχή !!!

• Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η εύρεση του κέντρου μάζας του συστήματος μπορεί να αντικαταστήσει το σύστημα με μία ομογενή ράβδο μάζας m=15kg και μήκους l=2·AM. Όμως κάτι τέτοιο δεν είναι ισοδύναμο μιας και η ροπή αδράνειας αυτής της ράβδου θα είναι:

$$I = \frac{1}{3}m\cdot(2AM)^2 = \frac{1}{3}15\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 5\cdot\frac{16\cdot 3}{9} = \frac{80}{3}kg\cdot m^2$$

• Επιπλέον αν ήθελε να δουλέψει με την κίνηση του κέντρου μάζας αντιμετωπίζοντάς το ως υλικό σημείο για την εύρεση της ταχύτητας, θα έπρεπε σε εφαρμογή του ΘΜΚΕ ή ΑΔΕ να βάλει και το έργο από τη δύναμη του άξονα.

Προφανώς με ανάλογο τρόπο θα μπορούσαμε να δουλέψουμε και στη Β περίπτωση αλλά τα νούμερα δεν είναι τόσο μεταχειρίσιμα όπως αυτά που προέκυψαν στην Α περίπτωση.

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com