Αλληλεπίδραση Ρευματοφόρων Βρόχων

Τερλεμές Σπύρος

Μαθητής Β' Λυκείου Σχολείο ΑΞΙΟΝ Ξάνθη

spyrosssterlemes@gmail.com

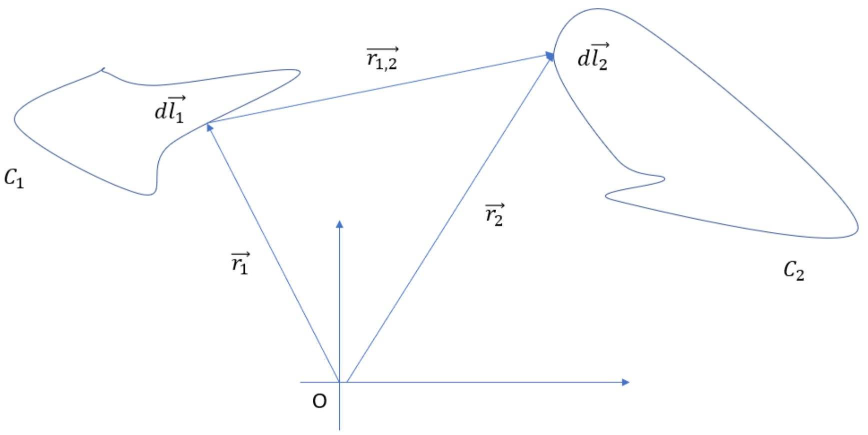
ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Την παρούσα μαθηματική ανάλυση είχα γράψει το καλοκαίρι του 2020 και θα παρουσιάσω στην παράλληλη μαθητική δράση που πραγματοποιείται μαζί με το 18^{ο} Πανελλήνιο συνέδριο της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έστω δύο ρευματοφόρες καμπύλες C_1 και C_2 που διαρρέονται από ομογενή ρεύματα I_1 και I_2. Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, κάθε αγωγός(ρευματοφόρα καμπύλη) δημιουργεί στον χώρο μαγνητικό πεδίο. Εφόσον τα ρεύματα είναι ομογενή και χρονικά ανεξάρτητα, τα μαγνητικά πεδία είναι συναρτήσεις θέσης. Ο κάθε αγωγός λοιπόν, βρίσκεται εντός του μαγνητικού πεδίου του άλλου αγωγού, που σημαίνει ότι δέχεται ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που οφείλονται στην ύπαρξη ρευμάτων. Άρα οι αγωγοί αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους, με δυνάμεις που καθορίζονται από τα χαρακτηριστικά της καμπύλης και του ρεύματος που την διαρρέει. Η σχέση των δυνάμεων και των αξιωμάτων στα οποία υπακούν, είναι το βασικό θέμα της ανάλυσης. Συγκεκριμένα, θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι οι δυνάμεις αλληλοεπίδρασης υπακούν στον νόμο της δράσης-αντίδρασης (ΙΙΙ νόμος Νεύτωνα), άρα το σύστημα των δύο αγωγών είναι μονωμένο ανεξάρτητα της σχετικής θέσης τους.

Έστω ορθοκανονική διανυσματική βάση με αρχή το Ο και έστω $\vec{r_1}$ και $\vec{r_2}$ τα διανύσματα θέσης δύο διαφορικών τμημάτων των αγωγών $d\vec{l_1}$ και $d\vec{l_2}$.



***Εικόνα 1**: Οι θέσεις των ρευματοφόρων αγωγών ως προς το σύστημα αναφοράς*

ΕΝΟΤΗΤΑ Α (Θεωρητική ανάλυση**)**

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί κάθε αγωγός στο διαφορικό τμηματίδιο του άλλου, μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο Biot-Savart. Δηλαδή, ο αγωγός έστω C_1 δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{B_1}(\overrightarrow{r_2})$ στο διαφορικό τμήμα $d\overrightarrow{l_2}$, όπου:

$$\overrightarrow{B_1} = \oint_{C_1} \frac{\mu I_1}{4\pi} \frac{d\overrightarrow{l_1} \times \overrightarrow{r_{1,2}}}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}$$

(1)

Αντίστοιχα λοιπόν, το μαγνητικό πεδίο που παράγει ο αγωγός C_2 στην τμήμα $d\overrightarrow{l_1}$ είναι:

$$\overrightarrow{B_2} = \oint_{C_2} \frac{\mu I_2}{4\pi} \frac{d\overrightarrow{l_2} \times \overrightarrow{r_{2,1}}}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|}$$

(2)

Κάθε τμηματίδιο διαρρέεται από ρεύμα, και βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου (εδώ το πεδίο είναι ανομοιογενές αφού η παράγωγος της χωρικής συνάρτησης του πεδίου είναι μη μηδενική. Με άλλα λόγια το πεδίο εξαρτάται από τον χώρο), οπότε δέχεται δύναμη Lorentz. Δηλαδή, η δύναμη που δέχεται το τμήμα $d\overrightarrow{l_1}$ λόγω της ύπαρξης του πεδίου $\overrightarrow{B_2} = \overrightarrow{B_2}(\overrightarrow{r_1})$ ή αλλιώς η δύναμη που ασκεί ο αγωγός C_2 στο τμήμα $d\overrightarrow{l_1}$ είναι:

$$d\overrightarrow{F_2} = I_1 d\overrightarrow{l_1} \times \overrightarrow{B_2} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} d\overrightarrow{l_1} \times \oint_{C_2} \frac{d\overrightarrow{l_2} \times \overrightarrow{r_{2,1}}}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}$$

(3)

Οπότε η συνολική δύναμη που δέχεται ο αγωγός C_1 δίνεται με κλειστή ολοκλήρωση των στοιχειωδών $d\overrightarrow{F_2}$ στην καμπύλη C_1:

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} d\overrightarrow{l_1} \times \oint_{C_2} \frac{d\overrightarrow{l_2} \times \overrightarrow{r_{2,1}}}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\overrightarrow{l_1} \times \left(d\overrightarrow{l_2} \times \overrightarrow{r_{2,1}}\right)}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}$$

(4)

Αντίστοιχα λοιπόν, η δύναμη $\overrightarrow{F_1}$ που ασκεί ο αγωγός C_1 στον αγωγό C_2 είναι:

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\overrightarrow{l_2} \times \left(d\overrightarrow{l_1} \times \overrightarrow{r_{1,2}}\right)}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}$$

(5)

Άρα η συνισταμένη δύναμη με την οποία αλληλοεπιδρούν οι ρευματοφόρες καμπύλες (δηλαδή η συνολική δύναμη στο σύστημα) είναι:

$$\sum_{i=1}^{\nu=2} \vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \sum \vec{F}$$

(6)

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει:

$$\sum \vec{F} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\overrightarrow{dl_2}\times(\overrightarrow{dl_1}\times\overrightarrow{r_{1,2}})}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}+\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\overrightarrow{dl_1}\times\left(\overrightarrow{dl_2}\times\overrightarrow{r_{2,1}}\right)}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}\right]$$

(7)

Αναπτύσσονται τα συνεχή εξωτερικά γινόμενα, με την ταυτότητα:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

(8)

Επίσης ισχύει:

$$\overrightarrow{r_{1,2}}=-\overrightarrow{r_{2,1}}$$

(9)

Οπότε από τις σχέσεις (8) και (9), η σχέση (7) γίνεται:

$$\sum \vec{F} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\overrightarrow{dl_1}\cdot\left(\overrightarrow{dl_2}\cdot\overrightarrow{r_{1,2}}\right)}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}+\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\overrightarrow{dl_2}\cdot\left(\overrightarrow{dl_1}\cdot\overrightarrow{r_{1,2}}\right)}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}\right]$$

(10)

Ισοδύναμα, χωρίζοντας τα διπλά επικαμπύλια ολοκληρώματα, στις καμπύλες C_1 και C_2, η σχέση (10) μπορεί να γραφτεί και στην παρακάτω μορφή:

$$\sum \vec{F} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{C_1}\overrightarrow{dl_1}\oint_{C_2}\frac{\overrightarrow{dl_2}\cdot\overrightarrow{r_{1,2}}}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}+\oint_{C_2}\overrightarrow{dl_2}\oint_{C_1}\frac{\overrightarrow{dl_1}\cdot\overrightarrow{r_{1,2}}}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3}\right]$$

(11)

Σύμφωνα με το θεώρημα Stokes σε γενική περίπτωση ισχύει:

$$\oint_{C}\vec{a}\cdot d\vec{l}=\iint(\vec{\nabla}\times\vec{a})d\vec{S}=\int_{S}(\vec{\nabla}\times\vec{a})d\vec{S}$$

(12)

Οπότε για ένα ολοκλήρωμα της παρακάτω μορφής (που υπάρχει διπλά στην σχέση (11)) ισχύει:

$$\oint_{C}\frac{d\vec{l}\cdot\vec{r}}{r^3}=\oint_{C}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)d\vec{l}=\iint\left(\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right)d\vec{S}$$

(13)

Ο στροβιλισμός όμως είναι μηδενικός, αφού το διανυσματικός πεδίο που στροβιλίζεται είναι συντηρητικό. Άρα ισχύει:

$$\oint_{C_2} \frac{\overrightarrow{dl_2} \cdot \overrightarrow{r_{1,2}}}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3} = \oint_{C_1} \frac{\overrightarrow{dl_1} \cdot \overrightarrow{r_{1,2}}}{\left|\overrightarrow{r_{1,2}}\right|^3} = 0$$

(14)

ΕΝΟΤΗΤΑ Β (Αποτελέσματα)

Άρα λοιπόν σύμφωνα με την σχέση (14), η σχέση (11) είναι:

$$\sum \vec{F} = 0$$

(15)

Με άλλα λόγια:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$$

(16)

ΕΝΟΤΗΤΑ Γ (Συμπεράσματα**)**

Φαίνεται λοιπόν ότι η συνολική δύναμη που επιδρά στο σύστημα είναι μηδενική, και κάθε αγωγός ασκεί στον άλλο ίδια δύναμη κατά μέτρο, αντίθετη κατά φορά. Οι δυνάμεις αυτές μάλιστα, έχουν και τον ίδιο φορέα, οπότε δεν υπάρχει ούτε ροπή ως προς οποιοδήποτε διανυσματική βάση. Άρα το σύστημα των δύο αγωγών είναι τελικά πλήρως μονωμένο, διατηρώντας τόσο την ορμή όσο και την στροφορμή του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

R. Shankar (2016). “Fundamentals of Physics II”, Yale University, ISBN: 978-0-300-21236-5

Murray R. Spiegel, John Liu, (2014) «Μαθηματικό εγχειρίδιο», Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN:960-8050-71-5