Μαθηματική μελέτη-απόδειξη του ΘΜΚΕ

Τερλεμές Σπύρος
28-9-2020
spyrosssterlemes@gmail.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (ΘΜΚΕ) σε πολύ μεγάλο εύρος ασκήσεων, τόσο μηχανικής σημειακών σωμάτων, όσο και σε μηχανική στερεών (συστημάτων σωματίων). Η βασική λογική του θεωρήματος είναι ότι οποιαδήποτε μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος, ισούται με το συνολικό έργο που επιδρά σε αυτό. Η απόδειξη του θεωρήματος για ένα σημειακό σώμα (σταθερής χρονικά μάζας) είναι εύκολη και θεμελιώνεται στον ΙΙ νόμο του Νεύτωνα. Χρησιμοποιούμε όμως ανενόχλητοι το ΘΜΚΕ και σε θέματα στερεών σωμάτων χωρίς να παραθέτουμε ξεχωριστή απόδειξη του. Με άλλα λόγια μπορεί το ΘΜΚΕ να ισχύει για σημειακά σώματα, αλλά το αν ισχύει και για συστήματα σωματίων (στερεά σώματα ή διακριτές κατανομές) δεν είναι τόσο απλό. Τον λόγο για τον οποίο συμβαίνει αυτό προσπαθώ να αναδείξω παρακάτω.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α' (Σημειακό Σώμα)

Έστω ένα σημειακό σώμα στο οποίο επιδρούν ν δυνάμεις και έστω ότι κάποια στιγμή η ορμή του είναι $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t) \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$, όπου m=m(t) η μάζα του σώματος την χρονική στιγμή t, και $\vec{v}(t) = \vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος την στιγμή t. Ο ΙΙ νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F} = \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

(1)

Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά με την μεταβολή της θέσης του σώματος $d\vec{r} = \vec{v}dt$ και έχουμε:

$$\sum \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{dm}{dt}\vec{v}\, d\vec{r} + md\vec{v}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = dm\, v^2 + m\vec{v}\, d\vec{v}$$

(2)

Ολοκληρώνουμε την σχέση (2):

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{r'}} \sum \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{m(t)}^{m(t')} v^2\, dm(t) + m\int_{\vec{v}}^{\vec{v'}} \vec{v}\, d\vec{v} = \int_{m(t)}^{m(t')} v^2\, dm(t) + \frac{1}{2}m(v'^2 - v^2)$$

(3)

Η αλλιώς:

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{r'}} \sum \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{m(t)}^{m(t')} \upsilon^2\, dm(t) + \frac{1}{2} m(\Delta \upsilon^2)$$

(4)

Το πρώτο μέλος είναι το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη που επιδρά στο σώμα. Μάλιστα, εφόσον το σώμα είναι σημειακό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το έργο της συνισταμένης δύναμης ισούται με το άθροισμα των έργων των επιμέρους δυνάμεων (όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό δεν είναι αυτονόητο). Ο λόγος που συμβαίνει αυτό, είναι λόγω των απειροστών διαστάσεων του σώματος, οι δυνάμεις αναγκαστικά επιδρούν σε ένα μόνο σημείο, οπότε η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής κάθε δύναμης είναι ίδια. Δηλαδή:

$$W = \int \sum \vec{F}\, d\vec{r} = \int (\vec{F_1} + \cdots + \vec{F_n}) d\vec{r} = \int \vec{F_1}\, d\vec{r} + \cdots + \int \vec{F_n}\, d\vec{r} = W_1 + \cdots + W_n$$

(5)

Το δεύτερο μέλος της σχέσης (4) είναι περίεργο. Καταλαβαίνουμε τον δεύτερο όρο ως μεταβολή της «κινητικής ενέργειας». Ο πρώτος όρος έχει να κάνει με την μεταβαλλόμενη μάζα του σώματος. Στην περίπτωση λοιπόν που η μάζα δεν αλλάζει, τότε ο πρώτος όρος είναι μηδενικός ($dm(t) = 0$) άρα η σχέση (4) γράφεται:

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{r'}} \sum \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{1}{2} m(\Delta \upsilon^2) \Rightarrow \sum W = \Delta K$$

(6)

Καταλήξαμε λοιπόν στην γνωστή μορφή του ΘΜΚΕ που απαιτεί το συνολικό έργο που επιδρά στο σημειακό σώμα, να είναι ίσο με την μεταβολή της κινητικής του ενέργειας. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι για να προκύψει το θεώρημα αυτό, πολλαπλασιάσαμε με $d\vec{r}$ τον ΙΙ νόμο του Νεύτωνα. Αυτό το διαφορικό, μπορεί να ληφθεί από οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς χωρίς η ισότητα να αλλάξει. Με άλλα λόγια, το σύστημα αναφοράς που επιλέγουμε να μελετήσουμε τις κινήσεις σχετίζεται με την τιμή του έργου και της κινητικής ενέργειας που θα υπολογίσουμε. Διαφορετικοί παρατηρητές, γενικά αντιλαμβάνονται διαφορετικά έργα. Αυτό το οποίο είναι σταθερό όμως, είναι η ισότητα (4) που δεν αλλάζει ανάλογα με τον παρατηρητή.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β' (Σύστημα Σωμάτων)

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα ν σωμάτων, το οποίο έχει μάζα M=M(t). Έστω ότι ασκούνται n δυνάμεις σε διαφορετικά σημεία του συστήματος, διαφορετικών τιμών και προσανατολισμών.

α. Κινητική Ενέργεια του Συστήματος

Έστω ότι το σύστημα περιστρέφεται περί νοητό άξονα με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και ο άξονας έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Τότε ένα σωμάτιο m_i θα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2$$

(5)

Αν η απόσταση του σωματίου από τον νοητό άξονα είναι $\vec{r_i}$ τότε η σχέση (5) γράφεται ισοδύναμα:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i (\vec{\upsilon} + \vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \frac{1}{2} m_i \upsilon^2 + \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \sin^2\theta + m_i \vec{\upsilon} (\vec{\omega} \times \vec{r_i})$$

(6)

Όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\omega}$ και $\vec{r}$. Η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος, είναι:

$$K = \sum_{i=1}^{\nu} K_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\nu} m_i\right)\upsilon^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\nu} m_i r_i^2 \sin^2\theta\right)\omega^2 + \vec{\upsilon}\left(\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{\nu} m_i \vec{r_i}\right)$$

(7)

Έχουμε τα εξής:

- Το πρώτο άθροισμα μας δίνει την μάζα του συστήματος:
$$\sum_{i=1}^{\nu} m_i = M$$
- Το δεύτερο άθροισμα μας δίνει την ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής:
$$\sum_{i=1}^{\nu} m_i r_i^2 \sin^2\theta = I$$
- Το τρίτο άθροισμα ισούται με το γινόμενο του διανύσματος θέσης του κέντρου μάζας και της μάζας του συστήματος, εφόσον:

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\nu} m_i \vec{r_i}$$

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνουμε την γενική μορφή της κινητικής ενέργειας ενός συστήματος σωμάτων:

$$K = \frac{1}{2} M \upsilon^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + M \vec{\upsilon} (\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{cm}})$$

(8)

Αξίζει να επισημανθούν να παρακάτω για την σχέση (8):

- Όταν το σώμα είναι σημειακό, τότε ο δεύτερος και τρίτος όρος είναι μηδενικός (αφού $\vec{r_i} = \overrightarrow{r_{cm}} = 0$). Οπότε η κινητική ενέργεια αποκτά την μορφή:

$$K = \frac{1}{2}M\upsilon^2$$

Σε πλήρη συμφωνία με την σχέση (6)

- Το σύστημα αναφοράς των διανυσμάτων θέσης είναι ο γενικά κινούμενος άξονας περιστροφής.
- Η σχέση ισχύει και για μη επίπεδα στερεά.
- Αν το σύστημα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση τότε η κινητική ενέργεια είναι πάλι:

$$K = \frac{1}{2}M\upsilon^2$$

- Αν το σύστημα εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση τότε η κινητική ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

- Αν το σύστημα κινείται και μεταφορικά αλλά και στροφικά, τότε θέτοντας νοητό άξονα περιστροφής το κέντρο μάζας, ο τρίτος όρος μηδενίζεται (αφού τότε $\overrightarrow{r_{cm}} = 0$) και η κινητική ενέργεια αποκτά την μορφή:

$$K = \frac{1}{2}M{\upsilon_{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

β. II Νόμος Νεύτωνα στο Σύστημα

Ο II νόμος του Νεύτωνα για ένα σύστημα ν σωμάτων στο οποίο επιδρούν n δυνάμεις παίρνει την μορφή:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F} = \left(\sum_{i=1}^{\nu} m_i\right)\frac{d^2\overrightarrow{r_{cm}}}{dt^2} \Rightarrow \sum \vec{F} = M\vec{a}$$

(9)

Όπου $\vec{a}$ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας ως προς ένα σύστημα αναφοράς. Έστω ότι η μάζα Μ είναι σταθερή Μ=Μ(t)=λ. Τότε πολλαπλασιάζοντας με $d\overrightarrow{r_{cm}}$ έχουμε:

$$\left(\sum \vec{F}\right) d\overrightarrow{r_{cm}} = M\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}$$

(10)

Όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\int_{\overrightarrow{r_{cm}}}^{\overrightarrow{r_{cm}'}} \sum \vec{F} \cdot d\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{2}M(\Delta\upsilon^2)$$

(11)

Γνωρίζουμε επίσης (απόρροια του ΙΙ νόμου Νεύτωνα) ότι αν ορίσουμε με άλγεβρα Lie την στροφορμή ενός συστήματος ως προς διανυσματική βάση (όχι απαραίτητα αδρανειακή) με $\vec{L}$ τότε:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{r_\iota} \times \vec{\upsilon_\iota}$$

(12)

Και ισχύει η σχέση:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau_\iota} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_\iota} \times \vec{F_\iota}) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{r_\iota} \times \vec{\upsilon_\iota}\right) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \left(\frac{d\vec{r_\iota}}{dt} \times \vec{\upsilon_\iota} + \vec{r_\iota} \times \frac{d\vec{\upsilon_\iota}}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (\vec{r_\iota} \times \vec{F_\iota}) &= \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{r_\iota} \times \frac{d\vec{\upsilon_\iota}}{dt} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{r_\iota} \times \frac{d}{dt}(\vec{\upsilon} + \vec{\omega} \times \vec{r_\iota}) \\
&= \sum_{i=1}^{\nu} m_i \vec{r_\iota} \times \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{r_\iota} \times \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r_\iota}) \\
&= \sum_{i=1}^{\nu} m_i \overrightarrow{r_{cm}} \times \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{r_\iota} \times \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r_\iota} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r_\iota}}{dt}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \overrightarrow{r_{\upsilon m}} \times \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{r_\iota} \times \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r_\iota}\right) + \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{r_\iota} \times \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r_\iota}}{dt}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (\vec{r_\iota} \times \vec{F}) = {} & \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \overrightarrow{r_{cm}} \times \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \sum_{i=1}^{\nu} m_i r_i^2 \, \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{r_\iota} \left(\vec{r_\iota} \frac{d\vec{\omega}}{dt}\right) \\
& + \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \vec{\omega} \left(\vec{r_\iota} \frac{d\vec{r_\iota}}{dt}\right) - \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \frac{d\vec{r_\iota}}{dt} (\vec{\omega}\vec{r})
\end{aligned}$$

(13)

Αν το στερεό είναι επίπεδο, τότε η σχέση (13) παίρνει την μορφή:

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{r_\iota} \times \vec{F_\iota}) = \left(\sum_{i=1}^{\nu} m_i \, r_i^2\right) \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \overrightarrow{r_{cm}} \times \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

(14)

Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι τα διανύσματα θέσης της σχέσης (14) παίρνονται από τον άξονα περιστροφής (νοητό ή μη). Μπορούμε λοιπόν να την γράψουμε απλούστερα ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{r_\iota} \times \vec{F_\iota}) = I \, \frac{d\vec{\omega}}{dt} + M\overrightarrow{r_{cm}} \times \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

(15)

Αν ολοκληρώσουμε την σχέση (15) πολλαπλασιάζοντας με $d\vec{\theta}$ έχουμε:

$$\int_{\vec{\theta}}^{\vec{\theta'}} \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times \vec{F_i}) d\vec{\theta} = \frac{1}{2} I\omega^2 + M(\overrightarrow{r_{cm}} \times \Delta\vec{v})\vec{\omega}$$

(16)

Λύνοντας ως προς τον πρώτο όρο του δεύτερου μέλους, προκύπτει:

$$\frac{1}{2} I(\Delta\omega^2) = \int_{\vec{\theta}}^{\vec{\theta'}} \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times \vec{F_i}) d\vec{\theta} - M(\overrightarrow{r_{cm}} \times \Delta\vec{v})\vec{\omega}$$

(17)

Τώρα λοιπόν μπορούμε να συνδυάσουμε την σχέση (11) και (17) στην σχέση (8) που δίνει την κινητική ενέργεια του συστήματος, και προκύπτει ο παρακάτω γενικός τύπος:

$$\Delta K = \int_{\overrightarrow{r_{cm}}}^{\overrightarrow{r_{cm}'}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \int_{\vec{\theta}}^{\vec{\theta'}} \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times \vec{F_i}) d\vec{\theta} + M\Delta\vec{v}(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{cm}}) - M(\overrightarrow{r_{cm}} \times \Delta\vec{v})\vec{\omega}$$

(18)

Εφαρμόζουμε την διανυσματική ταυτότητα των εξωτερικών-εσωτερικών γινομένων και έχουμε:

$$M\Delta\vec{v}(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{cm}}) = M(\overrightarrow{r_{cm}} \times \Delta\vec{v})\vec{\omega}$$

(19)

Οπότε η σχέση (18) γράφεται ξανά στην μορφή:

$$\Delta K = \int_{\overrightarrow{r_{cm}}}^{\overrightarrow{r_{cm}'}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \int_{\vec{\theta}}^{\vec{\theta'}} \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times \vec{F_i})$$

(20)

Η σχέση (18) είναι πολύ σημαντική. Μπορούμε ίσως να την θεωρήσουμε κάτι σαν γενικευμένο Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας σε συστήματα σωμάτων. Παρατηρούμε λοιπόν τα εξής:

- Αν εφαρμόσουμε την σχέση (18) για ένα σημειακό σώμα (ισχύει $\vec{\omega} = \overrightarrow{r_{cm}} = 0$) τότε προκύπτει όπως θα έπρεπε η σχέση (6):
- Όλα τα διανύσματα θέσης υπολογίζονται ως προς σημείο το οποίο είναι ο άξονας περιστροφής.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι γενικά η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός συστήματος, ΔΕΝ είναι ίση με το άθροισμα της περιστροφικής και μεταφορικής ενέργειας, και είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους έργων αλλά και με το ολοκλήρωμα του διακριτού αθροίσματος α. των δυνάμεων, β. των εξωτερικών γινομένων θέσης και δυνάμεων.

Δηλαδή ισχύει:

$$\int_{\overrightarrow{r_{cm}}}^{\overrightarrow{r_{cm}'}} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} + \int_{\vec{\theta}}^{\overrightarrow{\theta'}} \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i}) = \sum W_{\mu\varepsilon\tau} + \sum W_{\pi\varepsilon\rho} = \sum W = \Delta K$$

(21)

Οπότε καταλήγουμε ότι το ΘΜΚΕ ισχύει και σε συστήματα σωμάτων. Αρκεί η κινητική ενέργεια Κ του συστήματος , να ΜΗΝ γράφεται ως:

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

(22)

Αλλά να γράφεται μαζί με τον τρίτο όρο:

$$K = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + M\vec{\upsilon}(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{cm}})$$

(23)