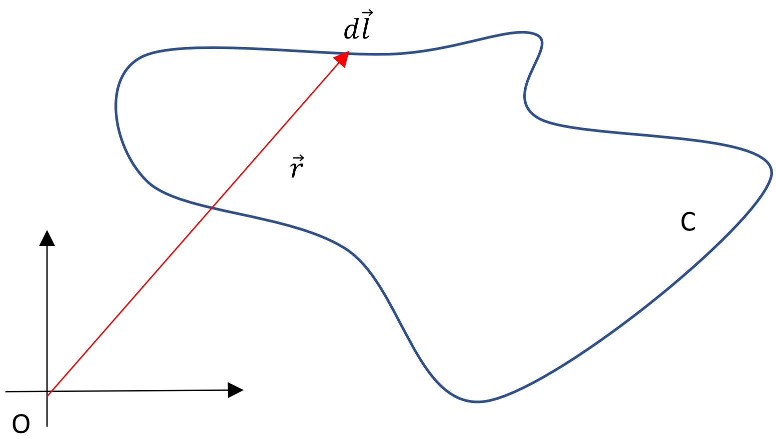
Μελέτη δυναμικής κατάστασης ρευματοφόρου καμπύλης εντός μαγνητικού πεδίου

Τερλεμές Σπύρος
30-9-2020
spyrosssterlemes@gmail.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έστω ότι έχουμε μια καμπύλη C στον χώρο, που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα πυκνότητας $\vec{j}(\vec{r})$. Αν στον χώρο της καμπύλης υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ τότε η καμπύλη δέχεται μαγνητική (Laplace) δύναμη έστω $\vec{F}$. Ταυτόχρονα αν θεωρήσουμε μια διανυσματική βάση με αρχή το O, η καμπύλη δέχεται ως προς το O και ροπή $\vec{M}$ λόγω των επιμέρους δυνάμεων $d\vec{F}$ στα διαφορικά της τμήματα. Στην ανάλυση αυτή θα μελετηθούν οι δυνάμεις και οι ροπές στην καμπύλη.



ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ

Έστω ένα διαφορικό τμήμα $d\vec{l}$ της καμπύλης C με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς την διανυσματική βάση. Η στοιχειώδης δύναμη που δέχεται το τμήμα είναι:

$$d\vec{F} = \left(\iint \vec{j}\,(\vec{r})d\vec{s}\right)\, d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

(1)

Αυτό διότι το ρεύμα στην περιοχή του τμήματος θα είναι ίσο με τη ροή ρεύματος που διέρχεται από την καμπύλη (λαμβάνουμε υπόψιν το πάχος της καμπύλης που θεωρούμε σταθερό κατά μήκος της). Η συνολική λοιπόν δύναμη που δέχεται η καμπύλη, θα δίνεται με κλειστή ολοκλήρωση πάνω στην C:

$$\vec{F} = \oint_C \left(\iint \vec{j}\,(\vec{r})d\vec{s}\right) d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

(2)

Έστω ότι η πυκνότητα ρεύματος είναι σταθερή και το πάχος επίσης σταθερό:

$$I = \iint \vec{j}\,(\vec{r})d^2\vec{r} = \iint \vec{j}\,(\vec{r})d\vec{s} = js$$

(3)

Όπου s είναι το πάχος της καμπύλης (επιφάνεια κίνησης φορτίων). Τότε σύμφωνα με την (3) το ρεύμα δεν είναι συνάρτηση της θέσης, άρα η σχέση (2) γράφεται:

$$\vec{F} = \oint_C Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}) = I\oint_C d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

(4)

Αν τώρα το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές, η σχέση (4) γράφεται:

$$\vec{F} = I\oint_C d\vec{l} \times \vec{B} = \left(\oint_C d\vec{l}\right) \times I\vec{B} = 0$$

(5)

Άρα λοιπόν η δύναμη που δέχεται μια ρευματοφόρος καμπύλη που διαρρέεται από ομογενές ρεύμα και βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου, είναι μηδενική. Η καμπύλη δεν είναι απαραίτητο να είναι επίπεδη αλλά μπορεί και να εκτείνεται στον τρισδιάστατο διανυσματικό χώρο.

ΡΟΠΗ ΣΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ

Κάθε στοιχειώδης δύναμη $d\vec{F}$ ασκεί μια ροπή στο πλαίσιο ως προς το σύστημα αναφοράς που έχουμε ορίσει. Η συνολική ροπή που επιδρά στην καμπύλη θα είναι λοιπόν:

$$\vec{M} = \oint_C \vec{r} \times d\vec{F}(\vec{r}) = \oint_C \vec{r} \times \left(\iint \vec{j}\,(\vec{r})d\vec{S}\right) d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

(6)

Αν θεωρήσουμε ομογενή κατανομή ρεύματος και ομογενές μαγνητικό πεδίο, η σχέση (6) γράφεται:

$$\vec{M} = \oint_C \vec{r} \times I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) = I\oint_C \vec{r} \times \left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) = I\oint_C d\vec{l}\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right) - I\vec{B}\oint_C \vec{r}\,d\vec{l}$$

(7)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Stokes για το δεύτερο ολοκλήρωμα πάνω στην καμπύλη C και έχουμε τον μετασχηματισμό σε ολοκλήρωμα επιφάνειας:

$$\oint_C \vec{r}\, d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{r}) d\vec{S} = 0$$

(8)

Αφού το διανυσματικό πεδίο $G(\vec{r}) = \vec{r}$ είναι αστρόβιλο, άρα $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$. Οπότε σύμφωνα με την (7) και την (8) η ροπή στην ρευματοφόρο καμπύλη θα είναι:

$$\vec{M} = I \oint_C \ (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{l}$$

(9)

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\imath}$ της διανυσματικής βάσης, έχουμε:

$$\vec{M} \cdot \vec{\imath} = I \oint_C \ \vec{\imath} \left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right) d\vec{l}$$

(10)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Stokes για την διανυσματική συνάρτηση στην (10) και προκύπτει:

$$\vec{M} \cdot \vec{\imath} = I \iint (\vec{\nabla} \times \vec{\imath}(\vec{r} \cdot \vec{B})) d\vec{S}$$

(11)

Ο στροβιλισμός της συνάρτησης $f(\vec{r}) = \vec{\imath}\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right)$ δίνεται από την 3 x 3 ορίζουσα ως εξής:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\imath}\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \vec{r} \cdot \vec{B} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\jmath}\ \frac{\partial\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right)}{\partial z} - \vec{k}\ \frac{\partial\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right)}{\partial y}$$

(12)

Όμως ισχύει ότι:

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = xB_x + yB_y + zB_z$$

(13)

Οπότε η σχέση (12) γράφεται σύμφωνα με την βοήθεια της (13):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\imath}\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right) = \vec{\jmath}\, B_z - \vec{k} B_y$$

(14)

Παρατηρούμε όμως ότι αν πάρουμε το εξωτερικό γινόμενο του μαγνητικού πεδίου και του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\imath}$ έχουμε την νέα ορίζουσα:

$$\vec{B} \times \vec{\imath} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\jmath}\, B_z - \vec{k}\, B_y$$

(15)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι δύο ορίζουσες είναι ισοδύναμες, άρα ισχύει ότι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\imath}\big(\vec{r} \cdot \vec{B}\big) = \vec{B} \times \vec{\imath}$$

(16)

Οπότε τώρα με την βοήθεια της σχέσης (16) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον στροβιλισμό της διανυσματικής συνάρτησης $f(\vec{r})$ με το εξωτερικό γινόμενο $\vec{B} \times \vec{\imath}$ και να γραφτεί ξανά η (11) ως:

$$\vec{M} \cdot \vec{\imath} = I \iint (\vec{B} \times \vec{\imath}) d\vec{S} = I \iint (\vec{B} \times d\vec{S})\vec{\imath}$$

(17)

Χωρίζοντας τα μέλη της (17) είναι:

$$\vec{\imath}\left(\vec{M} - I\vec{B} \times \iint d\vec{S}\right) = 0$$

(18)

Οπότε λοιπόν έχουμε υπολογίσει την ροπή που ασκείται σε μια ρευματοφόρο καμπύλη C επιφάνειας S:

$$\vec{M} = I\vec{B} \times \vec{S}$$

(19)

Αξίζει να αναφερθούν τα εξής:

- Η σχέση (19) ισχύει για ομογενή μαγνητικά πεδία
- Η επιφάνεια δεν είναι αναγκαστικό να είναι επίπεδη. Με άλλα λόγια η σχέση (19) εκφράζει την ροπή μιας κατανομής ρευμάτων στον R^3 χώρο.
- Το σύστημα αναφοράς από το οποίο μετράμε την ροπή δεν έχει σημασία. Δηλαδή από όποιο σημείο και αν υπολογίσουμε την ροπή θα βγάλουμε το ίδιο αποτέλεσμα.
- Η μέγιστη τιμή της ροπής $\vec{M}$ είναι $M = IBS$ όταν το πεδίο είναι κάθετο στο διάνυσμα της επιφάνειας.
- Η ροπή είναι μηδενική όταν το πεδίο είναι παράλληλο στο διάνυσμα επιφάνειας.

Έστω τώρα ότι δεν γνωρίζουμε την επιφάνεια $\vec{S}$ και πρέπει να την υπολογίσουμε. Αν η επιφάνεια είναι στο επίπεδο xy τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του

Green συσχετίζοντας τις διανυσματικές συναρτήσεις που περιγράφουν την καμπύλη. Δηλαδή θα ισχύει:

$$\iint d\vec{S} = \frac{1}{2}\oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

(20)

Οπότε η ροπή μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα:

$$\vec{M} = \frac{1}{2} I\vec{B} \times \oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

(21)