Μονοδιάστατη κίνηση – γενικευμένα ισοζύγια ορμής ή ενέργειας

Στη μία διάσταση ως γνωστόν ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$m\ddot{x} = F \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = F \Leftrightarrow m\frac{d\dot{x}}{dt} = F \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = F \Leftrightarrow m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = F \Leftrightarrow mv\frac{dv}{dx} = F$$

(όπου F η συνισταμένη δύναμη) οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις: (c = σταθερή)

Περίπτωση 1η: F = F_0 = σταθερή → επιλέγω να δουλέψω με την κάτωθι ισοδύναμη σχέση

$$mv\frac{dv}{dx} = F_0 \Leftrightarrow mvdv = F_0dx \xrightarrow{\int} m\frac{v^2}{2} = \int F_0dx + c \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - F_0x = c \xrightarrow{U=-F_0x} K + U = c$$

που οδηγεί σε ένα γενικευμένο ισοζύγιο ενέργειας. Αν επιλέξω να δουλέψω όμως με την κάτωθι σχέση τότε

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 \Leftrightarrow mdv = F_0dt \xrightarrow{\int} mv = \int F_0dt + c \Leftrightarrow mv - F_0t = c$$

οδηγούμαστε στο γνωστό θεώρημα ώθησης-ορμής ή αλλιώς σε ένα ισοζύγιο ορμής

Από τον συνδυασμό των δύο παραπάνω ισοζυγίων μπορεί να βρεθεί η γνωστή εξίσωση της τροχιάς x = x(t) παρουσία σταθερής δύναμης …

Περίπτωση 2η: F = F(x) → επιλέγω να δουλέψω με την κάτωθι ισοδύναμη σχέση

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x) \Leftrightarrow mvdv = F(x)dx \xrightarrow{\int} m\frac{v^2}{2} = \int F(x)dx + c \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \int F(x)dx = c \xrightarrow{U(x)=-\int F(x)dx} K + U = c$$

που οδηγεί πάλι σε γενικευμένο ισοζύγιο ενέργειας. Αν επιλέξω να δουλέψω όμως με την κάτωθι σχέση τότε

$$m\frac{dv}{dt} = F(x) \Leftrightarrow mdv = F(x)dt \xrightarrow{\int} mv = \int F[x(t)]dt + c = \int F(t)dt + c$$

οδηγούμαστε σε ένα ισοζύγιο ορμής μόνο εφόσον θεωρήσουμε την δύναμη σαν συνάρτηση του χρόνου εμμέσως όμως μέσω της θέσης x = x(t), αλλά μια τέτοια αναγωγή για την δύναμη αντιστοιχεί στην περίπτωση 3η παρακάτω … (αν αφήσουμε την δύναμη ως

συνάρτηση της θέσης τότε δεν μπορεί να προχωρήσει ο χωρισμός μεταβλητών και να οδηγηθούμε σε κάποιο ισοζύγιο ορμής).

Από τις περιπτώσεις 1 και 2 προκύπτει επίσης ότι αν η συνισταμένη δύναμη περιέχει συνδυασμό σταθερών ή αμιγώς χωροεξαρτώμενων όρων, τότε και πάλι καταλήγουμε σε ένα ενεργειακό ισοζύγιο και γενικά μπορούμε να αποδώσουμε μια ***αφηρημένη δυναμική ενέργεια*** *αν και εφόσον η συνισταμένη δύναμη προκύψει αμιγώς χωροεξαρτώμενη ή σταθερή ή συνδυασμός των περιπτώσεων 1 και 2*

Περίπτωση 3η: F = F(t) → επιλέγω να δουλέψω με την κάτωθι ισοδύναμη σχέση

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \Rightarrow mdv = F(t)dt \xrightarrow{\int} mv = \int F(t)dt + c \Leftrightarrow mv - \int F(t)dt = c$$

που μπορεί να ιδωθεί ως ένα ισοζύγιο ορμής, και υποδεικνύει ότι η ταχύτητα μπορεί να ιδωθεί ως συνάρτηση του χρόνου. Μπορώ περαιτέρω λοιπόν να κάνω και το εξής

$$mvdv = F(t)dx \Leftrightarrow mvdv = F(t)\frac{dx}{dt}dt \Leftrightarrow mvdv = F(t)v(t)dt \xrightarrow{\int}$$

$$m\frac{v^2}{2} = \int \underbrace{\underbrace{F(t)v(t)}_{\substack{\text{στιγμιαια ισχυς}\\ \text{δυναμης} \rightarrow p(t) = dW_F/dt}}}_{=-W_{F(t)}} dt + c \Leftrightarrow m\frac{v^2}{2} + \underbrace{W_{F(t)}}_{\substack{\text{εργο δυναμης } F(t)\\ \text{παιω σε καποιο}\\ \text{χρονικο διαστημα}}} = c$$

ο όρος $W_{F(t)}$ ανάλογα με το πρόσημό του προσθέτει επί της κινητικής ενέργειας ή αφαιρεί, και η συνολική έκφραση μπορεί να ιδωθεί ως ένα ενεργειακό ισοζύγιο. *Στην προκειμένη περίπτωση δεν υπάρχει ασυμβατότητα μεταξύ των δύο πορισμάτων γιατί περάσαμε από το πάνω στο κάτω αξιοποιώντας το γεγονός ότι η ταχύτητα είναι συνάρτηση του χρόνου.*

Να σημειωθεί δε ότι ο υπολογισμός του έργου αμιγώς χρονοεξαρτώμενης δύναμης makes sense μέσω της χρονικής ολοκλήρωσης της στιγμιαίας ισχύος της δύναμης (εμπνεόμενος βέβαια από τον κλασσικό ορισμό του έργου μιας δύναμης $\int Fdx$ ...)

Περίπτωση 4η: F = F(v) → επιλέγω να δουλέψω με την κάτωθι ισοδύναμη σχέση

$$m\frac{dv}{dt} = F \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F(v) \xrightarrow{F(v)\neq 0\ \forall\, v} m\frac{dv}{F(v)} = dt \xrightarrow{\int} m\int \frac{dv}{F(v)} = t + c$$

το οποίο όμως δεν θυμίζει ισοζύγιο ορμής (γιατί δεν αναγνωρίζουμε κάπου την ποσότητα mv), λαμβάνουμε όμως την πληροφορία ότι η ταχύτητα φέρει εξάρτηση από τον χρόνο

αφού ξεκάθαρα οδηγούμαστε σε μια έκφραση της μορφής $t = t(v)$, η οποία θεωρητικά υπό κάποιες ήπιες συνθήκες (implicit function theorem) είναι δυνατόν να αντιστραφεί και να οδηγήσει σε μια έκφραση της μορφής $v = v(t)$. Αν από την άλλη επιλέξω να δουλέψω ως κάτωθι, αξιοποιώντας και την τελευταία πληροφορία, έχουμε ότι

$$mv\frac{dv}{dx} = F(v) \Rightarrow mvdv = F(v)dx \Rightarrow mvdv = F(v)\frac{dx}{dt}dt \Rightarrow mvdv = F(v)v(t)dt \Rightarrow$$

$$mvdv = F(v(t))v(t)dt \xrightarrow{\int} m\frac{v^2}{2} = \int F(t)v(t)dt + c \Rightarrow m\frac{v^2}{2} = \underbrace{\int F(t)v(t)dt}_{=-W_{F(t)}} + c \Rightarrow$$

$$m\frac{v^2}{2} + W_{F(t)} = c$$

το οποίο επίσης καταδεικνύει ισοζύγιο ενέργειας.

Από τις περιπτώσεις 1 και 3 προκύπτει επίσης ότι αν η συνισταμένη δύναμη περιέχει συνδυασμό σταθερών και αμιγώς χρονοεξαρτώμενων όρων, τότε μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα ενιαίο ενεργειακό ισοζύγιο ...

Περίπτωση 5η: F = F(v, t) όπου θεωρούμε διακριτή εξάρτηση από την ταχύτητα v και τον χρόνο t, ας πούμε της μορφής $F(v,t) = f(v)\cdot g(t)$ → επιλέγω να δουλέψω με την κάτωθι ισοδύναμη σχέση

$$m\frac{dv}{dt} = F \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = f(v)\cdot g(t) \xrightarrow{f(v)\neq 0,\forall v} m\frac{dv}{f(v)} = g(t)dt \xrightarrow{\int} m\int\frac{dv}{f(v)} = \int g(t)dt + c$$

η οποία δεν θυμίζει ισοζύγιο ορμής, ή, αν από την άλλη επιλέξω να δουλέψω ως κάτωθι

$$mv\frac{dv}{dx} = F \Rightarrow mv\frac{dv}{dx} = f(v)\cdot g(t) \xrightarrow{f(v)\neq 0,\forall v} mv\frac{dv}{f(v)} = g(t)\frac{dx}{dt}dt \Rightarrow$$

$$m\int v\frac{dv}{f(v)} = \int g(t)v(t)dt + c$$

καταλήγω σε κάτι που δεν θυμίζει ισοζύγιο ενέργειας ... . Στην ειδική περίπτωση όπου $f(v) = 1/v$, προκύπτει από την πάνω εκ των ανωτέρων σχέσεων ότι

$$m\int\frac{dv}{1/v} = \int g(t)dt + c \Rightarrow m\int vdv = \int g(t)dt + c \Rightarrow \frac{m}{2}v^2 = \int g(t)dt + c$$

και αυτή η σχέση θυμίζει ενεργειακό ισοζύγιο, ενώ στην ειδική περίπτωση που $f(v) = v$, από την κάτω εκ των ανωτέρω σχέσεων προκύπτει ότι

$$m\int v\frac{dv}{v} = \int g(t)v(t)dt + c \Rightarrow m\int dv = \int g(t)v(t)dt + c \Rightarrow mv = \int g(t)v(t)dt + c$$

που θυμίζει ισοζύγιο ορμής.

Περίπτωση 6η: F(x, v), όπου θεωρούμε διακριτή εξάρτηση από την θέση x και την ταχύτητα v, ας πούμε της μορφής $F(x,v) = f(x)\cdot g(v)$ οπότε για να να δούμε που μπορούμε να φτάσουμε ... εδώ επιλέγουμε να δουλέψουμε με την κάτωθι ισοδύναμη σχέση

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x,v) \xrightarrow{g(v)\neq 0,\ \forall v} m\frac{v}{g(v)}dv = f(x)dx \xrightarrow{\int} m\int \frac{v}{g(v)}dv = \underbrace{\int f(x)dx}_{\equiv -u(x)} + c$$

$$\Rightarrow m\int \frac{v}{g(v)}dv + u(x) = c$$

το οποίο όμως δεν θυμίζει ισοζύγιο ορμής. Στην ειδική περίπτωση όμως που $g(v) = v$, έχουμε ότι

$$m\int \frac{v}{g(v)}dv + u(x) = c \Rightarrow m\int \frac{v}{v}dv + u(x) = c \Rightarrow mv + u(x) = c$$

όπου εδώ πέρα αναγνωρίζουμε ένα ισοζύγιο ορμής. Σημειώνεται ότι σε αυτή την ειδική τελευταία περίπτωση ισχύει ότι

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x,v) \rightarrow mv\frac{dv}{dx} = vf(x) \xrightarrow{v\neq 0} m\frac{dv}{dx} = f(x)$$

καταλήγουμε δηλαδή σε μια πρωτοτάξια συνήθη διαφορική εξίσωση της ταχύτητας ως συνάρτησης της θέσης, η οποία με ολοκλήρωση κατά μέλη οδηγεί στο ακριβώς από πάνω ισοζύγιο ορμής.

Περίπτωση 7η: F(x, t) → δεν εξετάζεται για την ώρα, γιατί, ακόμη κι αν πάρουμε την απλή περίπτωση όπου $F(x,t) = f(x)\cdot g(t)$, δεν μπορεί να λυθεί η διαφορική εξίσωση $m\ddot{x} = F(x,t) \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\cdot g(t)$ με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών (για να μπορέσουμε να εξάγουμε κάποιον όρο ορμής ή κινητικής ενέργειας όπως κάναμε παραπάνω) χώρια που η διαφορική εξίσωση είναι μη-γραμμική.

Σημειώνεται τέλος για λόγους πληρότητας ότι η γνωστή Νευτώνεια εξίσωση (για 1D) $m\ddot{x} = F \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = F$ είναι γραμμική μόνο αν φέρει την ακόλουθη μορφή

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,v,t) = -Ax - Bv + C(t) \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Ax(t) = C(t)$$

όπου Α και Β σταθεροί συντελεστές και C(t) συνάρτηση του χρόνου … οπότε μόνο σε αυτές τις περιπτώσεις ισχύει η αρχή της επαλληλίας για την επίλυση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης (σε αυτήν συμπεριλαμβάνεται ο αρμονικός ταλαντωτής, ο ταλαντωτής με απόσβεση, ο ταλαντωτής με απόσβεση και χρονοεξαρτώμενη διέγερση κτλ) – σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η εξίσωση καθίσταται μη-γραμμική και η επίλυσή της χρήζει φαντασίας … !